専門科目　電気電子系　2022 大修

時間 9:30 ～ 12:10

必須科目: 数学, 電磁気学
選択科目: 電気回路, 量子力学/物性基礎

目 次

注 意 事 項

1. 解答はそれぞれ指定された答案用紙に記入せよ。

2. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ。

3. 答案用紙の裏面には記入しないこと。

4. 答案用紙のホチキスは取り外さないこと。

5. 選択科目（電気回路，量子力学/物性基礎）はどちらか１科目を選択して解答すること。

6. 答案用紙の指示に従って解答すること。

1． $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$が有限で絶対積分可能な実関数$f(t)$に対して，フーリエ変換$F(\omega)$を

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

とする。ただし，jを虚数単位とし，関数$f(t)$，そのフーリエ変換$F(\omega)$は，2 階微分可能とする。以下の問に答えよ。なお，導出過程も示すこと。また，関数$f(t)$の導関数 $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$， $\frac{df(t)}{dt}$ をそれぞれ$f''(t)$，$f'(t)$と表記してもよい。（150 点）

1) 次の関数$g(t)$のフーリエ変換$G(\omega)$を関数$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$を用いて表せ。

a) $g(t)=\dfrac{d^2f(t)}{dt^2}$　　　　b) $g(t)=t^2f(t)$

2) 関数$f(t)$が次の微分方程式の解であるとき，関数$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$が満足する微分方程式を示せ。ただし，aは実数の定数である。

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2}-t^2f(t)=\mathrm{a}f(t)$$

3) 関数$f(t)$が次の微分方程式の解であるとする。ただし，nは 0 以上の整数である。

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2}-t^2f(t)=-(2n+1)f(t)$$

a) 関数$f(t)$が$f(t)=H_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ と表せるとき，関数$H_n(t)$が満足する微分方程式を示せ。

b) 上記のa)で求めた微分方程式の特殊解$H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{t^2})$は，$n$次のエルミート多項式とよばれる。$H_n(t)$，$H_{n+1}(t)$，$H_{n+2}(t)$が満足する漸化式を求めよ。

問 題 分 野
数学

2. 微分方程式に関する以下の問に，導出過程も含めて答えよ。（150 点）

1) 式(2.1)，(2.2)で与えられる微分方程式をそれぞれ解き，yの一般解を求めよ。ただし，yはxの関数とする。

a) $$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x} \qquad (2.1)$$

b) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0 \qquad (2.2)$$

2) 式(2.3)で与えられる微分方程式がある。ただし，yはxの関数とする。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = e^{-\alpha x} \qquad (2.3)$$

a) $\alpha = 1$の場合，yの一般解を求めよ。

b) $\alpha = 2$の場合，yの一般解を求めよ。

問題分野
電磁気学

1．　完全導体からなる円筒状電極をもつ長さ l の同軸コンデンサについて，以下の問に答えよ。問 1)～2) を通して，導体の厚さは十分薄く，無視できる。また，円筒端部における電界の乱れは無視し，円筒部分のみがキャパシタンスに寄与するものとする。真空の誘電率は ε_0 を用いよ。(150 点)

1) 図 1.1 のように，真空中におかれた，半径 a, b を持つ 2 つの円筒状電極に電圧 V が印加されている。円筒の長さ l は外側の円筒の直径よりも十分に長い ($l \gg 2b$)とする。

a) 印加電圧 V によって，内側および外側の円筒に，それぞれ単位長さあたり$+q$ および $-q$ の電荷が誘起されるとする。このとき，円筒の中心軸から垂直方向に距離 d ($a < d < b$) 離れた点 P における電界強度を求めよ。

b) 点 P における電位を求めよ。

c) 2 つの円筒間の単位長さあたりのキャパシタンスを求めよ。

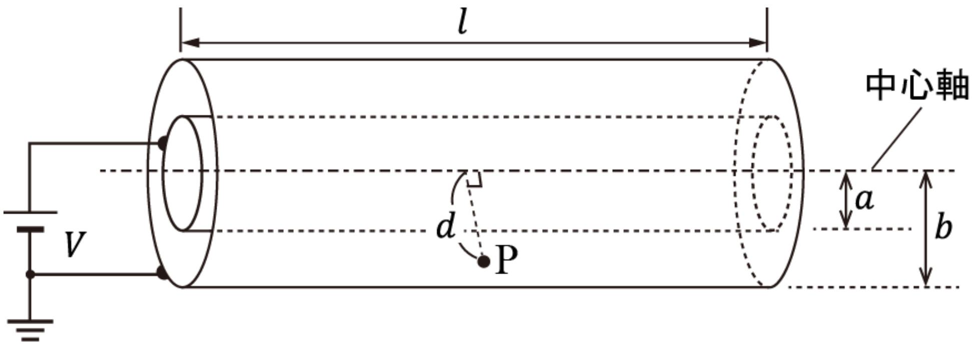

図 1.1

d) 図 1.2 のように，中心軸からの距離dとともに誘電率が変化する誘電体で 2 つの円筒間を満たすと，電界が d によらず一定となった。このとき，誘電率が距離 d に対してどのように変化するか説明せよ。

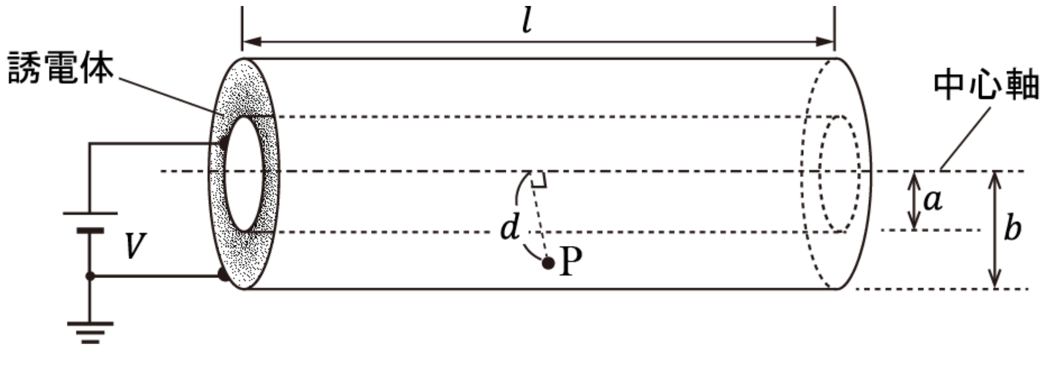

図 1.2

2) 図 1.3 のように, 真空中におかれた, 半径 a, b, c $(a < b < c)$を持つ 3 つの円筒状電極 A, B, C からなる同軸コンデンサを考える。内側の円筒 A と外側の円筒 C は細い導線で接続され，接地されている。円筒の長さ l はもっとも外側の円筒の直径よりも十分に長い $(l \gg 2c)$とする。

e) 円筒 A と円筒 C につながる端子 1 と円筒 B につながる端子 2 との間の単位長さあたりのキャパシタンスを求めよ。

f) 円筒 B に単位長さあたり q の正電荷があるとき，円筒 A と円筒 C に誘起される単位長さあたりの電荷量を，それぞれ符号を含めて求めよ。

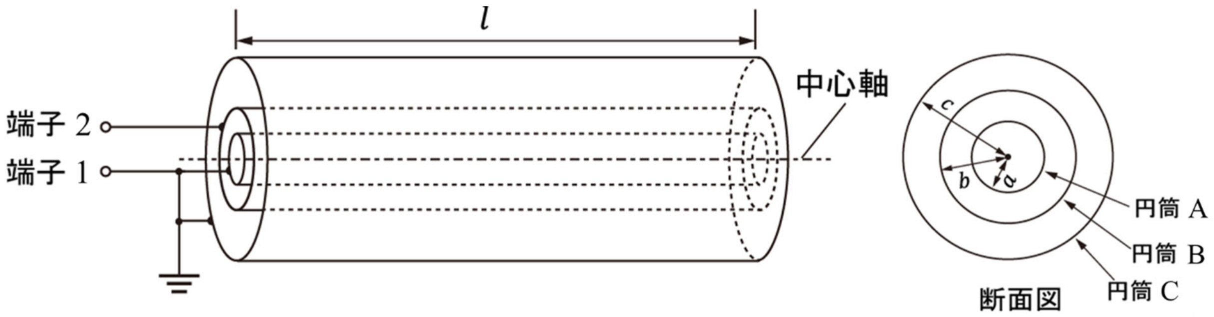

図 1.3

2. 図 2.1 のような，真空中にx軸と平行に置かれた完全導体の平行平板線路について考える。平板の幅はa，平板の間隔はbであり， $a \gg b$である。平板の長さはx方向に十分長く，平板の厚さは十分薄い。線路の左端部に電源，右端部に負荷を接続した際の，平板間の空間における電磁界について以下の問に答えよ。線路における端部効果は無視する。また，真空の誘電率，透磁率をそれぞれε_0，μ_0とする。（150 点）

1) 電源は直流電流源とし，負荷は短絡とすることで，上の導体に$+I$，下の導体に$-I$の電流をx方向に定常的に流した。以下の問に答えよ。ただし，y方向の電流分布は一様とする。

a) 平板間の空間における磁束密度の大きさを答えよ。また，磁束密度の向きはx，y，z軸のいずれと平行か答えよ。

b) 線路の単位長さあたりのインダクタンスLを求めよ。

2) 電源は直流電圧源とし，負荷は開放とすることで，上および下の導体に，それぞれ単位長さあたり電荷密度$+\sigma$，$-\sigma$の電荷が生じた。以下の問に答えよ。ただし，y方向の電荷分布は一様とする。

c) 平板間の空間における電界の大きさを答えよ。また，電界の向きはx，y，z軸のいずれと平行か答えよ。

d) 線路の単位長さあたりのキャパシタンスCを求めよ。

3) 電源は交流電流源とし，負荷は右端部で電流の反射が無いよう整合負荷とした。このとき，線路上の位置x，時間tにおいて，角周波数ωで上の導体に$+I_0 \cos(\omega t - kx)$，下の導体に$-I_0 \cos(\omega t - kx)$の交流電流がx方向に定常的に流れ，平板間の空間に平面波がx方向に伝搬する。以下の問に答えよ。ただし，y方向の電流分布は一様とし，kは波数とする。また，f)と h)は導出過程も記せ。

e) 平板間の空間における磁束密度$B(x,t)$を答えよ。

f) 電流連続の式より，上の導体の単位長さあたりの電荷密度$\sigma(x,t)$を求めよ。

g) f)で求めた電荷密度$\sigma(x,t)$より，平板間の空間における電界$E(x,t)$を答えよ。

h) e)とg)で求めた磁束密度$B(x,t)$と電界$E(x,t)$について，ファラデーの電磁誘導の法則の微分形を適用して，ε_0，μ_0，ω，kの間に成り立つ関係を導出し，平面波の位相速度をε_0，μ_0を用いて表せ。

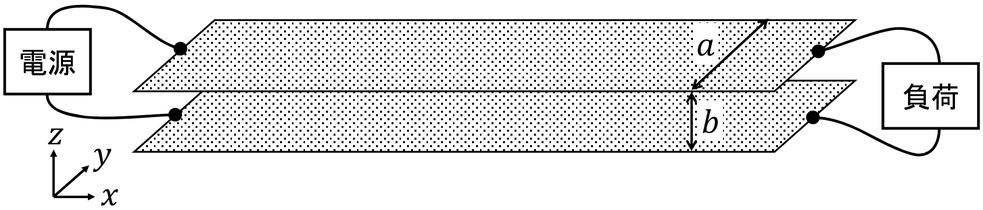

図 2.1

1. 図 1.1 の回路について以下の問に答えよ。Rを抵抗，Lをインダクタンス，Cをキャパシタンスとする。V_{in}を入力電圧，V_{out}を出力電圧とする。虚数単位はjを用いる。（100 点）

問 1) ~ 問 4)では，角周波数ωに対して図 1.2 のように定義された伝達関数$H(\omega) = \frac{V_{\text{out}}(\omega)}{V_{\text{in}}(\omega)}$について考える。

1) 図 1.1 の回路の伝達関数$H(\omega)$を答えよ。その際，以下の形に変形して四角枠部(ア)〜(ウ)を解答欄に記入せよ。 $H(\omega) = \dfrac{R}{\boxed{(ア)} + j\boxed{(イ)} + \dfrac{1}{j\boxed{(ウ)}}}$
2) 伝達関数$H(\omega)$の利得$|H(\omega)|$が最大となる角周波数ω_0を図中の回路素子パラメータR，L，Cのうち必要なものを用いて示せ。
3) $\omega = \omega_0$における利得$|H(\omega_0)|$を示せ。
4) 図 1.1 の回路はフィルタとして利用することができる。どのようなフィルタか，名称あるいは機能を述べよ。

問 5) ~ 問 7)ではラプラス変換を用いて回路の応答を求める。図 1.3 のように複素数sに対して定義された伝達関数$H(s) = \frac{V_{\text{out}}(s)}{V_{\text{in}}(s)}$について考える。

5) 図 1.1 の回路の伝達関数$H(s)$を答えよ。
6) 問 5)の伝達関数のポール（極）の値を図中の回路素子パラメータR，L，Cのうち必要なものを用いて示せ。
7) 問 6)で求めたポールが 2 つの負の実数となる場合を考える。それらを$-\alpha_1$と$-\alpha_2$とし、$\alpha_1 > \alpha_2$であるとする。回路の単位ステップ応答$v_{\text{out}}(t)$を求めよ。答はR，L，Cを用いずにα_1およびα_2を用いて示せ。

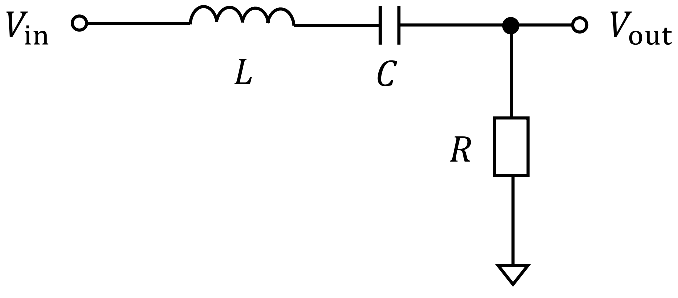

図 1.1

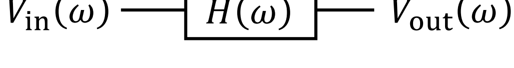

図 1.2

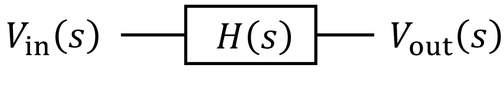

図 1.3

問 題 分 野
電気回路

2. 図 2.1 に示すインダクタンスLとキャパシタンスCの並列回路に，以下の式で与えられる二つの異なる周波数成分を持つ電圧$e_1(t)$を印加する。ただしtは時刻である。電圧，電流の数値の単位は，それぞれ V，A とする。

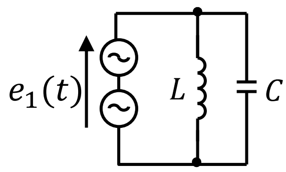

図 2.1

$$e_1(t) = 100\sqrt{2}\sin(500t) + \frac{100\sqrt{2}}{3}\sin(1500t)$$

$L = 10\mathrm{mH}$，$C = 300\mu\mathrm{F}$として，以下の問に答えよ。なお，数値については小数点以下を四捨五入して整数で答えよ。（100 点）

重ね合わせの理を用いて電流を求める。まず，500rad/s成分のみに着目する。

1) 500rad/s成分のみの電圧によってインダクタに流れる電流の実効値を求めよ。
2) 同様にキャパシタに流れる電流の実効値を求めよ。
3) 以上の結果から，電源に流れる電流の実効値I_1を求めよ。

次に，1500rad/s 成分のみの計算を行う。

4) この成分により電源に流れる電流の実効値I_3を求めよ。

以上の結果から電源の電流$i(t)$の実効値を算出する。周期Tの周期関数$i(t)$の実効値I_{rms}は以下の式で与えられる。

$$I_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\, dt}$$

5) いま，$i(t) = \sqrt{2}\, I_1 \sin(\omega t) + \sqrt{2}\, I_3 \sin(3\omega t)$とし，$I_{\mathrm{rms}}$を計算し，$I_1$ と I_3を用いて表せ。
6) 500rad/s 成分と1500rad/s 成分両方によって流れる電源の電流の実効値を求めよ。

次に，図 2.2 に示すように以下の式で与えられる電圧$e_2(t)$，$e_3(t)$を持つ電源を追加し，さらに，図 2.1 と等しい負荷を Y 接続して，3 本の電線で電源に接続する。

$$e_2(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(500t + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{100\sqrt{2}}{3}\sin(1500t)$$

$$e_3(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(500t + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{100\sqrt{2}}{3}\sin(1500t)$$

7) 500rad/s 成分の線間電圧の実効値を求めよ。
8) 電線 U に流れる電流の実効値を求めよ。

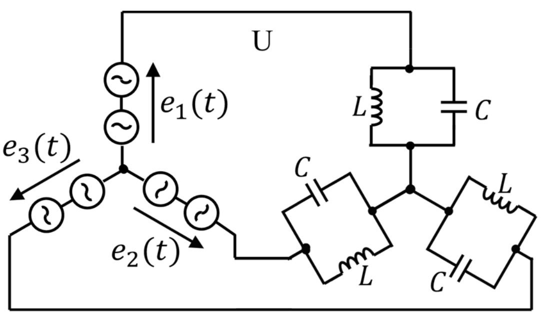

図 2.2

1．

幅Lが有限で，ポテンシャル高さV_0の 1 次元井戸型ポテンシャル$V(x)$を考える。このとき，$V(x)$は式(1.1)で表される。

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x < 0, x > L) \\ 0 & (0 \le x \le L) \end{cases} \qquad (1.1)$$

このポテンシャルに質量mの電子が束縛されており，$\hbar$はプランク定数を2πで割った定数，Eは電子のエネルギー固有値，$\psi(x)$は定常状態における電子の位置xに関する波動関数のとき，時間を含まないシュレーディンガー方程式は式(1.2)で表される。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \qquad (1.2)$$

以上を基に，下の①から⑨に対し，注釈の無い空欄には式あるいは数値を，それ以外には，空欄中の指示に従って適切な選択肢の選択やグラフの描画，説明等を答案用紙に記入すること。（100 点）

1) V_0が正に無限大の場合を考える。

a) $0 \le x \le L$における$\psi(x)$の一般解は$\psi(x) = \mathrm{A}\sin(kx) + \mathrm{B}\cos(kx)$と表される。ここで$k$は電子の波数，A，Bは定数である。$\psi(x)$が満たすべき境界条件から，$k$は正の整数$n$を用いて$k =$ ① の条件を満たす。したがって，規格化された$\psi(x)$は ② と表される。また，電子のエネルギー固有値Eはm，L，nを用いて$E =$ ③ と表される。

b) 図 1.1 に示すように，$0 \le x \le d$ $(d \le L)$の範囲に，最も小さいエネルギー固有値より十分小さいポテンシャル$\Delta V(x) = \delta V$が加わった場合を考える。ここでδVは定数とする。$\Delta V(x)$が加わっていない場合からのエネルギー固有値の変化量ΔEは，摂動の考えを基に，a)の$n = 1$における$\psi(x)$を用いて，

$$\Delta E \approx \int_0^d \psi^*(x)\,\Delta V(x)\psi(x)dx \qquad (1.3)$$

により近似的に求められる。ここで，$\psi^*(x)$は$\psi(x)$の複素共役を表す。式(1.3)を用いると，エネルギー固有値の変化量ΔEはL，d，δVを用いて$\Delta E =$ ④ と表される。

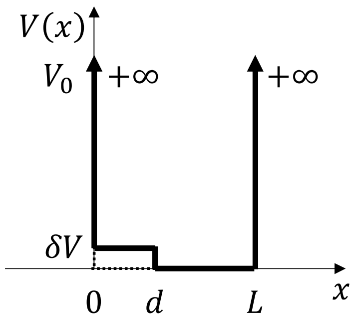

図 1.1

c) $0 \le x \le L$の範囲に，最も小さいエネルギー固有値より十分小さいポテンシャル$\Delta V(x) = \delta V\left(\frac{2}{L}x - 1\right)$が加わった場合を考える。$\delta V$は定数とする。ポテンシャル形状の特徴から$\Delta E =$ ⑤ となる。このとき，位置xで電子を見出す確率密度$|\psi(x)|^2$が最大となるのは，⑥（次のア～ウから選択。ア．井戸の中心$x = L/2$，イ．中心から$x = 0$に近い側，ウ．中心から$x = L$に近い側）である。また，その理由を説明せよ ⑦（説明）。

2) V_0が正に有限の場合を定性的に考える。

最も小さいエネルギー固有値を持つ規格化した波動関数$\psi(x)$を考える。位置xで電子を見出す確率密度$|\psi(x)|^2$について，$x = 0$における$|\psi(0)|^2$の振る舞いを，横軸にV_0，縦軸に$|\psi(0)|^2$とした概形のグラフとして示せ ⑧（グラフ概形の描画）。また，描いたグラフの形状となる理由を説明せよ ⑨（説明）。

2. 半導体中の電気伝導について考える。以下の問に答えよ。(100 点)

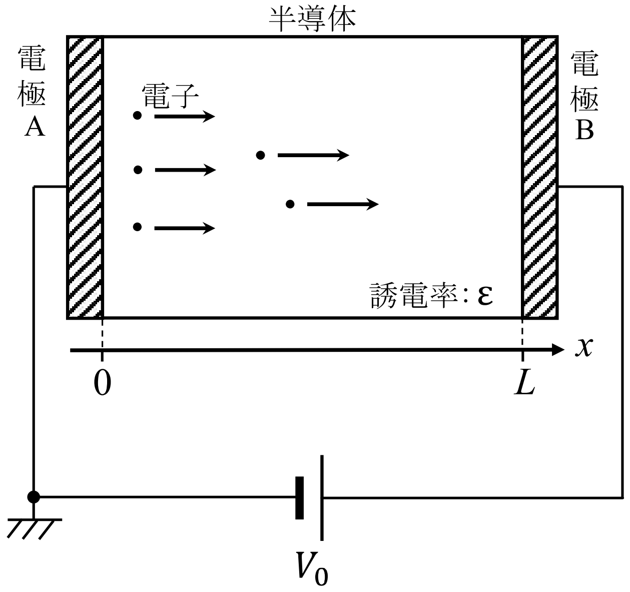

図 2.1

図 2.1 は, 電極 A から電子が半導体中に放出され，正の直流電圧 V_0 によって，電極 A から距離 L の位置にある電極 B に向かって運動し，時間的に一定の電流が流れている様子を表している。半導体は，熱平衡状態におけるキャリア濃度が 0 と見なせるものとする。図 2.1 の x 座標上の位置 x における電子の平均速度を$v(x)$，電荷密度を$\rho(x)$とし，電界の x 成分を$E(x)$，電位を$V(x)$とする。ただし，$V(0) = 0$, $V(L) = V_0$ と定める。簡単のため電子の速度は x 成分のみを持つものとし，また，$\rho(x)$，$v(x)$，$E(x)$，$V(x)$ は x 軸に垂直な面内で均一であると仮定する。電極は十分広く, 端部効果は無視できる。また, 正孔の放出は無いものとし，電極 B からの半導体中への電子の放出も無視せよ。

1) 以下の文中の空欄に当てはまる数式または語句を答えよ。

位置 x における電流密度 J は，$v(x)$と$\rho(x)$を用いて次のように表される。

$$J = \boxed{\quad ① \quad} \tag{2.1}$$

ガウスの法則より，$dE(x)/dx$ は，$\rho(x)$と半導体の誘電率εを用いて次のように表される。

$$\frac{dE(x)}{dx} = \boxed{\quad ② \quad} \tag{2.2}$$

ただし，ε は半導体内部で一定とする。また，放出された電子以外の電荷は無視せよ。ここで，$v(x)$ が$E(x)$ に比例する場合を考える。比例定数を μ とおくと，$v(x)$と$E(x)$の関係は次式のように表される。

$$v(x) = -\mu E(x) \tag{2.3}$$

問 題 分 野
量子力学/物性基礎

ただし，μ は正の実定数である。このような伝導機構を $\boxed{③}$ といい，μ は $\boxed{④}$ と呼ばれる。式(2.1)～(2.3)を用いて，$E(x)$と$\rho(x)$を消去し，J を$v(x)$を用いて表すと次式となる。

$$J = \boxed{⑤}\, v(x)\frac{dv(x)}{dx} \qquad (2.4)$$

定常状態では，J は位置 x に依らず一定値となることから，J を定数と見なすと，式(2.4)より，$v(x)\frac{dv(x)}{dx}$ は，次の式(2.5)の右辺のように，x に依らない定数になる。

$$v(x)\frac{dv(x)}{dx} = \frac{1}{\boxed{⑤}} J \qquad (2.5)$$

2) 以下の a)～c)の問に答えよ。導出過程も示すこと。

a) 式(2.5)の両辺を x で積分することにより，
境界条件 $v(0) = 0$ かつ $v(x) \geq 0$ を満たす $v(x)$ を式で示せ。

b) 上で求めた$v(x)$と式(2.3)を用いて，電界$E(x)$を求め，$E(x)$を積分することにより電位$V(x)$を計算して式で示せ。ただし，$V(x) = -\int_0^x E(x)dx$ である。

c) J をV_0を用いた式で示せ。