筆答専門試験科目（午前）　　　　2022 大修
システム制御系（数学）

時間 ９：３０～１１：３０

注意事項

1. 問題 1 から問題 4 まで，すべてについて解答せよ。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開かないこと。
3. 解答は問題ごとに別々の答案用紙に記入せよ。
   各答案用紙の裏面も解答に使用してよいが，ひとつの問題は 1 枚に収めること。
4. 解答開始の合図があったら，各答案用紙の受験番号欄に受験番号を，解答欄左上にその答案用紙で解答する問題番号を，試験科目名欄に科目名「システム制御系（数学）」を記入せよ。なお，答案用紙に氏名は書かないこと。
5. 提出時には，答案用紙を使わなかった分も含め全て提出すること。

（このページは落丁ではありません。問題は次ページ以降に記載されています。）

問題１

問１　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$$

問２

(1) 次の複素積分を求めよ。ただし，積分路 C は複素平面上の $|z - \pi i| = 1$ で表される円周上を反時計回りに一周する経路とする。ここで，$i = \sqrt{-1}$ とする。

$$\oint_C \frac{\cosh \frac{z}{4}}{z - \pi i} dz$$

(2) 次の複素積分を求めよ。ただし，積分路 C は複素平面上の $|z| = 2$ で表される円周上を反時計回りに一周する経路とする。ここで，$i = \sqrt{-1}$ とする。

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z + i)^3} dz$$

問３

(1) 次の関数のマクローリン級数を求めよ。ただし，α と x は実数とする。

$$f(x) = (1 + x)^\alpha$$

(2) (1)で求めた級数は，α の値によって収束する条件が異なる。この級数が収束する x の範囲を求めよ。

（問題１終わり）

問題２

問１　次式で与えられる行列 A の固有値をすべて求めよ。また，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ。なお，固有ベクトルは要素の絶対値の和が 1 になるように規格化すること。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

問２　問 1 の行列 A の固有値のうち，絶対値が最小となるものを λ_1，絶対値が最大となるものを λ_2 とおく。λ_1 および λ_2 に対応する問 1 で求めた固有ベクトルをそれぞれ p, q とおく。このとき，以下の方程式の解 r のうち，そのユークリッドノルム $\|r\|$ が最小となるものを求めよ。なお, I_3 は 3×3 の単位行列である。

$$(A - \lambda_2 I_3) r = q$$

問３　問２のベクトル p, q および r を用いて，行列 $P = [p \quad q \quad r]$ を定義する。このとき，P の逆行列 P^{-1} を求めよ。また，$B = P^{-1} A P$ を求めよ。

問４　問３の行列 B を考える。非負の実数 $t \geq 0$ に対する e^{-Bt} の全ての行列要素を求めよ。

（問題２終わり）

問題３

0 以上の整数値をとる独立な確率変数 X, Y を考え，それぞれ以下の確率分布 $f(X)$，$g(Y)$ に従うとする。ここで，$0 < q < 1$，$\lambda > 0$ である。また，E[ ] は期待値を表す。以下の問に答えよ。導出過程も示すこと。

$$f(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$g(Y = y) = \begin{cases} (1-q)q^{y-1} & (y > 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

問１ ある確率変数 S の分散が ${\sigma_S}^2$ であるとき，${\sigma_S}^2 = \mathrm{E}[S^2] - (\mathrm{E}[S])^2$ が成立することを示せ。

問２ 確率変数 X のモーメント母関数 $M_X(t)$ は次のように表される。

$$M_X(t) = \mathrm{E}[e^{Xt}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} f(X = x) = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

モーメント母関数とモーメントの関係を利用して，確率変数 X の平均 μ_X と分散 σ_X^2を求め，λ を用いて表せ。

問３ 確率変数 Y のモーメント母関数 $M_Y(t)$ が次の式で表されることを示せ。なお，$t < -\log_e q$ とする。

$$M_Y(t) = \frac{(1-q)e^t}{1 - qe^t}$$

問４ 確率変数 $Z = X + Y$ とするとき，Z のモーメント母関数 $M_Z(t)$ を，X と Y のモーメント母関数 $M_X(t)$ と $M_Y(t)$ を用いて表せ。

問５ $q = 0.5$，$\lambda = 1$ とし，$t < \log_e 2$ とする。

(1) 確率変数 $Z = X + Y$ のモーメント母関数 $M_Z(t)$ を求めよ。
(2) モーメント母関数 $M_Z(t)$ の t に関する微分を求めよ。
(3) 確率変数 Z の平均 μ_Z を求めよ。

（問題３終わり）

問題４

２つの独立な実変数 $x,\ t$ の実関数 $u(x,t)$ は，t に関するラプラス変換が可能であるとする。実関数 $u(x,t)$ は以下の偏微分方程式，境界条件，初期条件を満たす。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \pi t \sin \pi x \qquad (0 \le x \le 1,\quad 0 \le t < \infty) \tag{1}$$

$$\text{境界条件：} u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$\text{初期条件：} u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

なお，$u(x,t)$ の t に関するラプラス変換 $U(x,s)$ は，複素数 s を変数として次式で表される。

$$U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st} dt$$

以下の問に答えよ。導出過程も示すこと。

問１　式(1)をラプラス変換し，初期条件を考慮して，$U(x,s)$ の x に関する微分方程式を導出せよ。

問２　問１で導出した微分方程式を解き，解 $U(x,s)$ を求めよ。

問３　問２で得られた解をラプラス逆変換し，解 $u(x,t)$ を求めよ。

（問題４終わり）

筆答専門試験科目（午前）　　　　2022 大修
システム制御系（数学）

時間　９：３０～１１：３０

追試験

これ以降は、追試験の問題です。 システム制御系では、系の方針により、

2022 年 4 月入学追試験の過去問題も公開しております。

注意事項

1. 問題 1 から問題 4 まで，すべてについて解答せよ。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開かないこと。
3. 解答は問題ごとに別々の答案用紙に記入せよ。
   各答案用紙の裏面も解答に使用してよいが，ひとつの問題は 1 枚に収めること。
4. 解答開始の合図があったら，各答案用紙の受験番号欄に受験番号を，解答欄左上にその答案用紙で解答する問題番号を，試験科目名欄に科目名「システム制御系（数学）」を記入せよ。なお，答案用紙に氏名は書かないこと。
5. 提出時には，答案用紙を使わなかった分も含め全て提出すること。

（このページは落丁ではありません。問題は次ページ以降に記載されています。）

問題１

問１　テイラー展開を使って，次の極限値を求めよ。ただし，a，b は実数とする。

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right\}$$

問２

(1)　次の複素積分を求めよ。ただし，積分路 C_1 は複素平面上の $|z+\pi i|=1$ で表される円周上を反時計回りに一周する経路とする。ここで，$i=\sqrt{-1}$ とする。

$$\oint_{C_1}\frac{e^{\frac{z}{3}}}{z+\pi i}dz$$

(2)　留数を求めることにより，次の複素積分を求めよ。ただし，積分路 C_2 は複素平面上の $|z|=2$ で表される円周上を反時計回りに一周する経路とする。ここで，$i=\sqrt{-1}$ とする。

$$\oint_{C_2}\frac{e^{-z}}{(z-i)^2}dz$$

問３　以下の曲線および直線で囲まれる図形 D を考える。

$$曲線\ y=\frac{2\log_e(x+1)}{x+1}\ \left(ただし\ x>-1\right),$$

$$直線\ x=e^2-1,\qquad 直線\ x=\frac{1}{e}-1\,,\qquad 直線\ y=0$$

(1)　図形 D の面積 S を求めよ。

(2)　図形 D を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

（問題１終わり）

問題２

実数 t の微分可能な実関数 $f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ f_4(t)$ に対して，それらの線形結合

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + a_3 f_3(t) + a_4 f_4(t) \quad (a_1, a_2, a_3, a_4 \text{は実数})$$

で表される関数全体のなす空間を $\mathrm{span}\,\{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)\}$ と表す。以下の問に答えよ。

問１　次式で与えられる行列 T の逆行列を求めよ。

$$T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

問２　以下の空欄(1)~(5)を適切な数式で埋めよ。(1)~(4)の答は a_1, a_2, a_3, a_4 を用いて表せ。

$X = \mathrm{span}\,\{\sin t, \cos t, \sin 3t, \cos 3t\}$ を考えると，X の要素 f は

$$f(t) = a_1 \sin t + a_2 \cos t + a_3 \sin 3t + a_4 \cos 3t \quad (a_1, a_2, a_3, a_4 \text{は実数})$$

と表される。この f の t に関する微分 f' も X の要素である。すなわち，f' は

$$f'(t) = b_1 \sin t + b_2 \cos t + b_3 \sin 3t + b_4 \cos 3t \quad (b_1, b_2, b_3, b_4 \text{は実数})$$

と表される。ここで，$b_1 = \boxed{(1)}$，$b_2 = \boxed{(2)}$，$b_3 = \boxed{(3)}$，$b_4 = \boxed{(4)}$ となる。
このとき，

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

を満足する行列 $N = \boxed{(5)}$ を，X の要素を t で微分する写像の，基底 $\{\sin t, \cos t, \sin 3t, \cos 3t\}$ に関する行列表示と呼ぶ。

問３　$X = \mathrm{span}\,\{\sin t, \cos t, \sin 3t, \cos 3t\}$ とする。

(1) 次式を満足する実数 c_1, c_2, c_3, c_4 および d_1, d_2, d_3, d_4 を求めよ。

$$\sin^3 t = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 \sin 3t + c_4 \cos 3t$$

$$\cos^3 t = d_1 \sin t + d_2 \cos t + d_3 \sin 3t + d_4 \cos 3t$$

(2) X の任意の要素 f が $\sin t, \cos t$，$\sin^3 t$，$\cos^3 t$ の線形結合で表せることを示せ。

(3) X の要素 f を t で微分する写像の，基底 $\{\sin t, \cos t, \sin^3 t, \cos^3 t\}$ に関する行列表示を求めよ。

（問題２終わり）

問題３

問１　形と見た目が同じ２つのコイン A，B をランダムに１つ選び，選んだコインを２回投げたところ，１回目が表で，２回目が裏であった。コインには表と裏しかなく，コイン A の表の出る確率は 0.6，コイン B の表の出る確率は 0.5 である。

(1) 選んだコインが A である尤度 L_A と，選んだコインが B である尤度 L_B を求めよ。

(2) 選んだコインが A である事後確率 P_A と，選んだコインが B である事後確率 P_B を求めよ。

問２　３つの工場 A, B, C である製品が作られており，それぞれの生産割合は 0.6，0.3，0.1 である。また，それぞれの不良品が発生する割合を F_A，F_B，F_C とする。製品の不良が報告されたとき，その不良品が工場 A で生産された確率を F_A，F_B，F_C を用いて表せ。

問３　ある実験により，量 x_1 と x_2 を測定することを考える。このとき，測定値 y は次のように表される。

$$y(a_1, a_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \varepsilon$$

ここで a_1，a_2 は測定パラメータであり，ε は下記の確率密度関数に従う誤差である。

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2}\right]$$

測定パラメータを変化させながら，測定を３回行い，次のような結果を得た。

測定パラメータ (a_1, a_2)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
測定値 y	-5	7	1

(1) ３回測定したときの x_1 と x_2 に関する尤度 L を求めよ。

(2) 最尤法により x_1 と x_2 を推定せよ。

(3) 文献から，x_1 と x_2 の差 $x_1 - x_2$ は，平均１，分散２の正規分布に従うことが確認された。この情報を事前確率に利用して，３回測定したときの x_1 と x_2 を事後確率最大化法により推定せよ。

（問題３終わり）

問題４

独立変数 t の関数 $u(t)$ に関する以下の微分方程式を解く。

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 2t\frac{du}{dt} + 4u = 0 \qquad (1)$$

ここで，関数 $u(t)$ の $t = 0$ まわりの級数展開を式(2)とおき，式(1)の解の候補とする。

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \qquad (2)$$

以下の問に答えよ。導出過程も示すこと。

問１　c_n の漸化式を求めよ。

問２　問１で求めた漸化式について，偶数項 $n = 2m$ と奇数項 $n = 2m + 1$ の場合にわけて考える。なお，m は 0 以上の整数である。偶数項について，c_2 および c_{2m} $(m \geq 2)$ を求めよ。さらに，奇数項について c_3 および c_{2m+1} $(m \geq 2)$ を求めよ。なお，解答には m, c_0, c_1 を用いても良い。

問３　$u(t)$ の収束半径を調べよ。

問４　$c_0 = c_1 = 1$ とする。 $u(t)$ の近似解を t の 7 次項まで求めよ。

（問題４終わり）