

# 筆答専門試験科目（午前）

29 大修

## 数学系

時間 9:00 ~ 11:30

### 注意事項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない。
2. 以下の問題 5 題すべてに解答せよ。
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ。
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ。
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 3 ページからなる。
6. 口頭試問を代数分野，幾何分野，解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと。

記号について： $\mathbb{R}$  は実数全体を表す。

[1]  $V$  を 3 次実正方行列全体のなす実ベクトル空間とし,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とする. また, 通常 of 行列の積に関して  $A$  と可換な  $V$  の元全体を  $W$  とする.

- (1)  $W$  は  $V$  の部分空間であることを示せ.
- (2)  $A$  を対角化せよ.
- (3)  $W$  の任意の元は  $A$  の実数係数の多項式として表されることを示し,  $W$  の次元を求めよ.

[2]  $n$  次複素正方行列  $A$  に対し,  $\text{rank } A^n = \text{rank } A^{n+1}$  であることを示せ.

[3]  $a \in \mathbb{R}, r \geq 0$  に対し,  $\mathbb{R}$  の部分集合

$$U(a; r) = (-a - r, -a + r) \cup (a - r, a + r)$$

を考える. ただし,  $U(a; 0) = \emptyset$  とする.

- (1)  $\mathcal{B} = \{U(a; r) \mid a \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$  は  $\mathbb{R}$  のある位相  $\mathcal{O}$  の開基 (開集合系の基底) となることを示せ.
- (2) 位相空間  $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$  はハウスドルフ空間ではないことを示せ.
- (3) 位相空間  $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$  は連結であることを示せ.
- (4)  $[0, 1]$  は  $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$  のコンパクト集合であるが閉集合ではないことを示せ.

[4] (1) 無限級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log n}$  が収束する実数  $p$  の範囲を求めよ .

(2)  $\mathbb{R}$  上の実数値関数の列  $\{f_n\}$  がある関数  $f$  に  $\mathbb{R}$  上で一様収束している . 各  $n$  について  $f_n$  が多項式であるとき ,  $f$  もまた多項式であることを示せ .

[5]  $f$  は区間  $[0, 1)$  上で連続な実数値関数とする .

(1) 左極限

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$$

が有限の値ならば ,  $f$  は  $[0, 1)$  上で一様連続であることを示せ .

(2) 不等式

$$\limsup_{x \rightarrow 1-0} f(x) > \liminf_{x \rightarrow 1-0} f(x)$$

が成り立つならば ,  $f$  は  $[0, 1)$  上で一様連続ではないことを示せ .

(3)  $f$  は  $[0, 1)$  上で微分可能で , 導関数  $f'$  は  $[0, 1)$  上で連続とする . ある  $\alpha \in (0, 1)$  に対して ,

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^\alpha f'(x)$$

が有限の値ならば ,  $f$  は  $[0, 1)$  上で一様連続であることを示せ .

# 筆答専門試験科目（午後）

29 大修

## 数学系

時間 13:00 ~ 15:00

### 注意事項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない。
2. 以下の問題のうち2題を選択して解答せよ。
3. 解答は1題毎に別々の解答用紙に記入せよ。
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ。
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で5ページからなる。
6. 口頭試問を代数分野，幾何分野，解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の1ページ目の受験番号の下に書くこと（午前と同じ分野を書くこと）

### 記号について：

- $\mathbb{N}$  は正の整数全体を表す。
- $\mathbb{Z}$  は整数全体を表す。
- $\mathbb{Q}$  は有理数全体を表す。
- $\mathbb{R}$  は実数全体を表す。
- $\mathbb{C}$  は複素数全体を表す。

[1]  $f(x) = x^4 - 1$  とする .

- (1) 剰余環  $\mathbb{C}[x]/(f(x))$  の素イデアルをすべて求めよ .
- (2) 剰余環  $\mathbb{R}[x]/(f(x))$  の素イデアルと極大イデアルをすべて求めよ .
- (3) 剰余環  $\mathbb{Z}[x]/(5, f(x))$  の素イデアルをすべて求めよ .

[2] (1)  $G, H$  を 2 つの群とし ,  $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(G)$  を群準同型とする . 直積集合  $G \times H$  に次のような積  $*$  を考える :  $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$  に対して ,

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \varphi(h_1)(g_2), h_1 h_2).$$

このとき ,  $G \times H$  はこの積に関して群になることを示せ . また ,  $\varphi$  が自明でないなら , この群はアーベル群ではないことを示せ . ただし ,  $\text{Aut}(G)$  は  $G$  の自己同型群を表し ,  $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(G)$  が自明でないとは  $\varphi(h)$  が  $G$  の恒等写像とならないような  $h \in H$  が存在することである .

- (2)  $p$  を素数とし ,  $n$  を 3 以上の自然数とするととき , 位数  $p^n$  の群でアーベル群ではないものが存在することを示せ .

[3]  $\zeta$  を 1 の原始 9 乗根  $e^{2\pi\sqrt{-1}/9}$  とするとき ,  $\mathbb{Q}(\zeta)$  の部分体をすべて求めよ .

[4]  $n$  を 2 以上の自然数とし ,  $\mathbb{C}^n$  の部分集合  $M$  を次で定める .

$$M = \left\{ (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n z_i^2 = 1 \right\}.$$

- (1)  $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$  とみなすとき ,  $M$  は  $\mathbb{R}^{2n}$  の部分多様体であることを示せ .
- (2) 写像  $p: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を

$$p(z_1, z_2, \dots, z_n) = (\text{Re } z_1, \text{Re } z_2, \dots, \text{Re } z_n)$$

で定め ,  $p$  を  $M$  に制限して得られる写像を  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  とする .  $f$  の臨界点と臨界値をすべて求めよ . ただし ,  $\text{Re } z$  は複素数  $z$  の実部を表す .

- (3)  $M$  は  $(n-1)$  次元球面とホモトピー同値であることを示せ .

[5] 5次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^5 = \{(t, x_1, y_1, x_2, y_2) \mid t, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}\}$  上の1次微分形式  $\eta = \{\eta_p\}_{p \in \mathbb{R}^5}$  を

$$\eta = dt - y_1 dx_1 - y_2 dx_2$$

で定義する.

- (1)  $d\eta$  および  $\eta \wedge d\eta \wedge d\eta$  を求めよ.
- (2) 各点  $p \in \mathbb{R}^5$  において,  $\text{Ker } \eta_p$  の1組の基底とその次元  $\dim(\text{Ker } \eta_p)$  を求めよ.
- (3)  $\mathbb{R}^5$  内の  $k$  次元可微分部分多様体  $M^k$  で,

$$(*) \quad T_p M^k \subset \text{Ker } \eta_p \quad (p \in M^k)$$

を満たすものを考える. このとき,  $d\eta$  の  $M^k$  への制限  $d\eta|_{M^k}$  に関して

$$d\eta|_{M^k} = 0$$

が成立することを示せ. ここで  $T_p M^k$  は  $p \in M^k$  における  $M^k$  の接空間を表す.

- (4) (3) の条件 (\*) を満たす  $M^k$  が存在するとき,  $k \leq 2$  であることを示せ.

[6]  $\mathbb{R}^3$  内の互いに接する半径1の3つの球面  $S_1, S_2, S_3$  を

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 = 1\}$$

とし,  $I = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2\}$  とする.

- (1)  $X = S_1 \cup I$  の整係数ホモロジー群を求めよ.
- (2)  $Y = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  の整係数ホモロジー群を求めよ.

[7] 正の実数  $R > 0$  に対して,

$$D(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$$

とおく. 複素関数  $f$  は  $D(R)$  で正則で,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) \neq 0$  とする. さらに  $0 < |z| < R$  において  $f(z) \neq 0$  であるとする. このとき,  $0 < r < R$  に対して,

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

とおく.

(1)  $m = \inf\{|f(z)| \mid z \in \partial D(r)\}$  とするとき,  $g(w)$  は  $|w| < m$  において正則であることを示せ.

(2)  $|w| < m$  である任意の  $w \in \mathbb{C}$  に対して,

$$f(z(w)) = w, \quad |z(w)| < r$$

を満たす  $z(w) \in \mathbb{C}$  が唯一つ存在することを示せ.

(3) (2) における  $w, z(w)$  について,  $z(w) = g(w)$  であることを示せ.

[8]  $\lambda$  を  $\mathbb{R}$  上の 1 次元ルベーグ測度とし,  $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  を可積分関数とする.

(1)  $r > 0$  に対して  $\mathbb{R}$  上の可測関数  $g_r$  を

$$g_r(x) = \min\{g(x), r\}$$

で定める.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_r d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$$

および

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} g_r d\lambda = 0$$

を示せ.

(2) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $\delta > 0$  で,

$$\lambda(A) < \delta \text{ なる任意の可測集合 } A \subset \mathbb{R} \text{ に対して } \int_A g d\lambda < \varepsilon$$

を満たすものが存在することを示せ.

(3)  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) および  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $|f_n| \leq g$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) および  $|f| \leq g$  を満たす可積分関数とする. さらに, 各  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つとする. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$$

を示せ.

[9]  $C(I)$  を  $I = [0, 1]$  上の実数値連続関数全体とし,  $C(I)$  上にノルムを

$$\|x\| = \max_{t \in I} |x(t)|$$

で定める.  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $A \in C(I)$  とし,  $S: C(I) \rightarrow C(I)$  を

$$(Sx)(t) = \alpha + \int_0^{t^2} A(s)x(s) ds$$

で定める. また, 帰納的に  $S^{m+1}x = S(S^m x)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) と定める.

(1) ある定数  $M > 0$  に対し,

$$\|Sx - Sy\| \leq M\|x - y\|$$

が任意の  $x, y \in C(I)$  で成り立つことを示せ.

(2)  $m$  が十分に大きければ, 任意の  $x, y \in C(I)$  に対して,

$$\|S^m x - S^m y\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$$

が成り立つことを示せ.

(3)  $Sx = x$  となる  $x \in C(I)$  が唯一つ存在することを示せ. ただし,  $C(I)$  が完備であることは用いてよい.