平成 29 年 4 月入学及び平成 28 年 9 月入学

大学院修士課程・専門職学位課程入学試験

理学院　数学系

筆答専門試験科目

想　定　問　題

平成 28 年 1 月

東京工業大学

※　出題される分野、問題数等本想定問題の内容は、実際の試験問題とは異なる場合があります。

※　各系の試験概要については，２月上旬に公表予定です。

※　本入学試験にかかる募集要項は，４月上旬に本学ホームページで公表し，志願票等を含む冊子を５月上旬より配布する予定です。

大修

数学試験 I（想定問題）

時間　9：００～１１：３０

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題５題すべてに解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で３ページからなる.
6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について：$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.

[**1**] (1) 広義積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (1+x^2+y^2)^\alpha dxdy$$

が収束するための実数 α に関する条件を求めよ．

(2) 実数列 $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のとき実数 a に収束するならば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = a$$

となることを示せ．

[**2**] $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ が

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

を満たすとする．

(1) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で有界であることを示せ．

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $g(x)$ が

$$g(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$$

を満たすとする．$n = 1, 2, \ldots$ に対して,

$$f_n(x) = n\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)g(ny)dy$$

とおくとき, 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ．

[**3**] a, b を 0 でない実数とし,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

とする．A の固有値をすべて求め，各固有空間の基底を一組ずつ求めよ．また, A の最小多項式を求めよ．

[**4**] n を正整数とし, A を n 次複素正方行列とする.

(1) 不等式

$$\mathrm{rank}\ A + \mathrm{rank}\ (E_n - A) \geq n \qquad (*)$$

を示せ. ここで E_n は n 次単位行列である.

(2) 不等式 $(*)$ で等号が成り立つためには $A^2 = A$ が必要十分であることを示せ.

[**5**] $\mathbb{R}^2$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{U \times \mathbb{R}\,;\, U \text{ は } \mathbb{R} \text{ の通常の位相に関する開集合}\}$$

で定める. また,

$$I = \{t \in \mathbb{R}\,;\, 0 < t < 1\}, \quad J = \{t \in \mathbb{R}\,;\, 0 \leq t \leq 1\}$$

とおく.

(1) $\mathcal{O}$ は開集合系の公理を満たすことを示せ.

(2) 位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間か.

(3) 部分集合 $I \times I$, $I \times J$, $J \times I$, $J \times J$ は位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ のコンパクト集合か.

(4) $I \times I$, $I \times J$, $J \times I$, $J \times J$ の $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ における閉包を求めよ. (答のみでよい.)

大修

数学試験 II（想定問題）

時間　１３：００～１５：００

注意事項：

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち２題を選択して解答せよ.
3. 解答は１題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で３ページからなる.
6. 口頭試問を代数系，幾何系，解析系のどれで受けることを希望するかを解答用紙の１ページ目の受験番号の下に書くこと.（午前と同じ系を書くこと.）

記号について：

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.

[**1**] 体 $k=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ の拡大体 $K=k(\sqrt[3]{2},\sqrt{5})$ を考える.

(1) K/k はガロア拡大であることを示し, ガロア群を求めよ.

(2) K/k のすべての中間体を求めよ.

[**2**] m を正整数とし, $R=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とおく. 一変数多項式環 $R[x]$ の可逆元が R の可逆元だけであるためには, p^2 が m の約数となるような素数 p が存在しないことが必要十分であることを示せ.

[**3**] $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面を

$$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,x^2+y^2+z^2=1\}$$

とする.

(1) $\mathbb{R}^3$ 上の 1 次微分形式 dz を S^2 に制限して得られる 1 次微分形式 $dz|_{S^2}$ の零点集合 (0 になる点全体) を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ 上の 2 次微分形式 $dx\wedge dy$ を S^2 に制限して得られる 2 次微分形式 $(dx\wedge dy)|_{S^2}$ の零点集合を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ 上の 2 次微分形式

$$\alpha=dy\wedge dz+dz\wedge dx+dx\wedge dy$$

を S^2 に制限して得られる 2 次微分形式 $\alpha|_{S^2}$ の零点集合を求めよ.

[**4**] $\mathbb{R}^3$ において, xz 平面上の円周 $S_1:\,(x-1)^2+z^2=1$ を, z 軸に平行な直線 $x=-1,\ y=0$ の周りに回転して得られるトーラスを T_1 とする. また, xy 平面上の円周 $S_2:\,(x+1)^2+y^2=1$ を, y 軸に平行な直線 $x=1,\ z=0$ の周りに回転して得られるトーラスを T_2 とする.

(1) T_1 と T_2 の共通部分 $T_1\cap T_2=S_1\cup S_2$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

(2) T_1 と T_2 の和集合 $T_1\cup T_2$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

[5] 自然数 n に対して

$$A_n = \int_0^\pi \frac{nx^2}{1+nx}\cos x\,dx, \quad B_n = \int_0^\pi \frac{nx}{1+nx^2}\cos x\,dx$$

とする．このとき数列 $\{A_n\}$ および $\{B_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ．

[6] (1) n を自然数とするとき

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n+1}}dx = \frac{\pi}{(2n+1)\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}$$

が成り立つことを示せ．

(2) φ を $\Delta = \{z \in \mathbb{C};\, |z| < 1\}$ で正則で，すべての $z \in \Delta$ に対して $\varphi(z) \neq 0$ なるものとする．このとき $0 < r < 1$ なる任意の r に対して

$$\log|\varphi(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\varphi(re^{i\theta})|d\theta$$

が成り立つことを示せ．

[7] $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ 上の関数の列 $\{h_j(x,t)\}_{j=0}^\infty$ を次の漸化式によって定義する．

$$h_0(x,t) = \sin x,$$

$$h_{j+1}(x,t) = h_0(x,t) + \int_0^t \frac{h_j(x,s)^2}{(t-s)^{1/2}}ds.$$

$\mathbb{R} \times [0,\infty)$ 上の関数 h と各 $T > 0$ に対して，$||h||_T = \sup_{0<t<T}\sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x,t)|$ と定める．

(1) $h_1(x,t)$ を求めよ．

(2) 十分小さな $T > 0$ に対して，$||h_j||_T \leq 2$ $(j = 0,1,2,\cdots)$ となることを示せ．

(3) 十分小さな $T > 0$ に対して

$$||h_j - h_k||_T \to 0 \quad (j,k \to \infty)$$

となることを示せ．