平成 29 年 4 月入学及び平成 28 年 9 月入学

大学院修士課程・専門職学位課程入学試験

情報理工学院　数理・計算科学系

筆答専門試験科目

想　定　問　題

平成 28 年 1 月

東京工業大学

※　出題される分野、問題数等本想定問題の内容は、実際の試験問題とは異なる場合があります。

※　各系の試験概要については，２月上旬に公表予定です。

※　本入学試験にかかる募集要項は，４月上旬に本学ホームページで公表し，志願票等を含む冊子を５月上旬より配布する予定です。

専門科目 (午前) 想定問題

数理・計算科学

時間 午前9時30分 – 午後1時

Mathematical and Computing Science

Time AM9:30 – PM1:00

注意事項

1. 専門基礎問題，問A, 問B, 問C より 2問を選択し解答せよ．
2. 専門一般問題，問1〜問9 より 3問を選択し解答せよ．
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある．
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ．
5. 解答は 1問ごとに1枚の解答用紙に記入せよ．
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと．

Instruction

1. Solve 2 problems out of Problems A, B, and C.
2. Solve 3 problems out of Problems 1 to 9.
3. Note that if you solved more problems than specified above, all problems you solved might not be scored.
4. Write the problem number and your examinee number in the designated place of each answer sheet.
5. Use one answer sheet per problem.
6. You may use the other side of the answer sheet, but in that case you should indicate that, for example, by writing "continue to the other side."

問 A

以下では，ベクトルや行列の成分はすべて実数とする．$n \times n$ 対称行列 $\boldsymbol{A}$ が半正定値であるとは，任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$ となることである．ただし，$^\top$ はベクトルまたは行列の転置を表す．また，次の命題は証明なしで用いて構わない．

- 対称行列 $\boldsymbol{A}$ は適当な直交行列 $\boldsymbol{U}$ と対角行列 $\boldsymbol{D}$ を用いて $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^\top$ と表せる．
- 対称行列 $\boldsymbol{A}$ が半正定値であるための必要十分条件は，その固有値がすべて非負となることである．

(1) 任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top$ が半正定値行列となることを示せ．

(2) $n \times n$ 半正定値対称行列 $\boldsymbol{A}$ に対して $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$ を満たす半正定値対称行列 $\boldsymbol{B}$ が存在することを示せ（行列 $\boldsymbol{B}$ の一意性は示さなくてよい）．

$n \times n$ 対称行列 $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$，$\boldsymbol{B} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ に対して $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^\top)$ と定義する．ただし，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})$ は行列 $\boldsymbol{C}$ のトレースである．

(3) $n \times n$ 対称行列 $\boldsymbol{A}$ が，任意の $n \times n$ 半正定値対称行列 $\boldsymbol{X}$ に対して $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ を満たすならば，$\boldsymbol{A}$ もまた半正定値行列となることを示せ.（ヒント：(1) の結果を用いる.）

(4) 逆に $n \times n$ 対称行列 $\boldsymbol{A}$ が半正定値行列ならば，任意の $n \times n$ 半正定値対称行列 $\boldsymbol{X}$ に対して $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ となることを示せ.（ヒント：(2) の結果を用いる.）

Problem A

In what follows, all the elements of vectors and matrices are real. An $n \times n$ symmetric matrix $\boldsymbol{A}$ is called positive semidefinite if $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$ is valid for an arbitrarily n-dimensional vector $\boldsymbol{x}$. Here, $^\top$ means a transpose of a vector or a matrix. Also, the following statements can be used without proofs.

- A symmetric matrix $\boldsymbol{A}$ can be written as $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^\top$ by considering an appropriate orthogonal matrix $\boldsymbol{U}$ and a diagonal matrix $\boldsymbol{D}$.
- A necessary and a sufficient condition for a symmetric matrix $\boldsymbol{A}$ to be positive semidefinite is that all of its eigenvalues are non-negative.

(1) Show that $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\top$ is a positive semidefinite matrix for an arbitrarily n-dimensional vector $\boldsymbol{x}$.

(2) Given an $n \times n$ positive semidefinite symmetric matrix $\boldsymbol{A}$, show that there is a positive semidefinite symmetric matrix $\boldsymbol{B}$ such that $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$ (it is not necessary to show the uniqueness of $\boldsymbol{B}$).

For $n \times n$ symmetric matrices $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, and $\boldsymbol{B} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, we define $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^\top)$, where $\mathrm{tr}(\boldsymbol{C})$ is the trace of $\boldsymbol{C}$.

(3) If an $n \times n$ symmetric matrix $\boldsymbol{A}$ satisfies $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ for an arbitrarily $n \times n$ positive semidefinite symmetric matrix $\boldsymbol{X}$, then show that $\boldsymbol{A}$ is also a positive semidefinite matrix. (Hint: Use the fact (1)).

(4) On the other hand, if the $n \times n$ symmetric matrix $\boldsymbol{A}$ is positive semidefinite, show that $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X} \rangle \geq 0$ is valid for an arbitrarily $n \times n$ positive semidefinite symmetric matrix $\boldsymbol{X}$. (Hint: Use the fact (2)).

問 B

(1) つぎの不定積分を求めよ

$$\int \frac{\log x}{(1+x)^3}dx.$$

(2) つぎの広義積分を求めよ

$$\int_2^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}dx.$$

Problem B

(1) Find the indefinite integral

$$\int \frac{\log x}{(1+x)^3} dx.$$

(2) Find the improper integral

$$\int_2^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3} dx.$$

問 C

以下の (1), (2) 両方ともに解答せよ．

(1) 正整数上の関数 $f(n)$ と $g(n)$ が次の条件を満たすことを「$f(n)$ は $O(g(n))$ である」と言う．

$$\exists c, \exists m, \forall n \Big(n \geq m \;\Rightarrow\; f(n) \leq c \cdot g(n) \Big)$$

ただし c, m, n は正整数上の変数であり $\Rightarrow$ は「ならば」を表す論理記号である．

(1-1) 上記の条件の否定，つまり「$f(n)$ は $O(g(n))$ でない」ということを上記と同様に論理式で表せ．ただし否定を表す論理記号を用いてはいけない．「かつ」を表す $\wedge$ や「または」を表す $\vee$ は用いてもよい．

(1-2) $2n^2 + 4$ は $O(n^2)$ であることを証明せよ．

(2) 次の C 言語プログラムを考える．ただし `D[1..10]` はランダムな初期値が入った整数配列，`x`, `y`, `n` は整数変数である．

```
x = [ 1 ];
while (x [ 2 ]) {
    y = [ 3 ];
    while (y [ 4 ]) {
        if (D[y] > D[y+1]) {
            n = D[y]; D[y] = D[y+1]; D[y+1] = n;
        }
        y = [ 5 ];
    }
    x = [ 6 ];
}
```

このプログラムが次の二条件を満たすように空欄 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, ..., $\boxed{6}$ に適切な記述を埋めよ．

- これが `D[1..10]` に対するソートアルゴリズムを実現する．すなわちこのプログラムの実行後には `D` の値が必ず `D[1]` $\leq$ `D[2]` $\leq \cdots \leq$ `D[10]` となる．
- プログラムの 1 回の実行中にちょうど 45 回のデータ比較（if 文の実行）を行う．

埋める記述は以下の表の中から空欄ごとに一つずつ選ぶこと．複数の正解がある場合でも複数の記述を選んではいけない．

空欄	記述
$\boxed{1}$	`1`，`2`，`9`，`10`
$\boxed{2}$	`>=1`，`>=2`，`<=9`，`<=10`
$\boxed{3}$	`1`，`2`，`9`，`10`，`x`，`x+1`，`x-1`
$\boxed{4}$	`>=1`，`>=2`，`>=x`，`>=x+1`，`>=x-1`，`<=9`，`<=10`，`<=x`，`<=x+1`，`<=x-1`
$\boxed{5}$	`y+1`，`y-1`
$\boxed{6}$	`x+1`，`x-1`

なお `>=` と `<=` はそれぞれ等号付き不等号「$\geq$」と「$\leq$」を意味する．

Problem C

Solve the following two questions.

(1) Let $f(n)$ and $g(n)$ be functions on the positive integers. We say "$f(n)$ is $O(g(n))$" if the following condition holds.

$$\exists c, \exists m, \forall n \Big(n \geq m \;\Rightarrow\; f(n) \leq c \cdot g(n) \Big)$$

where c, m and n are variables on positive integers and "$\Rightarrow$" is the logical symbol that represents "implies."

(1-1) Write the negation of the above logical formula (that is, a logical formula whose meaning is reflected by the statement "$f(n)$ is not $O(g(n))$") without using the logical symbol that represents "not". You may use the logical symbols "$\wedge$" (for "and") and "$\vee$" (for "or").

(1-2) Prove that $2n^2 + 4$ is $O(n^2)$.

(2) Consider the following code written in C, where `D[1..10]` is an array of integers with random initial value and `x`, `y` and `n` are integer variables.

```
x = [ 1 ];
while (x [ 2 ]) {
    y = [ 3 ];
    while (y [ 4 ]) {
        if (D[y] > D[y+1]) {
            n = D[y]; D[y] = D[y+1]; D[y+1] = n;
        }
        y = [ 5 ];
    }
    x = [ 6 ];
}
```

Fill in the blanks $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, ..., $\boxed{6}$ with appropriate expressions so as to satisfy the following two conditions.

- This realizes a sorting algorithm for `D[1..10]`. In other words, the value of `D` must be `D`[1] $\leq$ `D`[2] $\leq \cdots \leq$ `D`[10] after the execution of the program.
- The comparison between data (that is, the `if`-statement of the above program) is executed exactly 45 times during one execution of the program.

For each blank, choose one expression from the following table. You may not choose two or more expressions for one blank even if there are many correct answers.

Blanks	Expressions
1	`1`, `2`, `9`, `10`
2	`>=1`, `>=2`, `<=9`, `<=10`
3	`1`, `2`, `9`, `10`, `x`, `x+1`, `x-1`
4	`>=1`, `>=2`, `>=x`, `>=x+1`, `>=x-1`, `<=9`, `<=10`, `<=x`, `<=x+1`, `<=x-1`
5	`y+1`, `y-1`
6	`x+1`, `x-1`

Note that the operators `>=` and `<=` mean "$\geq$" and "$\leq$" respectively.

問 1

整数 a, b, c に対して

$$a \equiv b \pmod{c}$$

は $a-b$ が c の倍数であることを意味するものとする．自然数 n に対して その階乗を $n!$ で表すとき，以下の問に答えよ．

(1) $6! \equiv -1 \pmod 7$ および $10! \equiv -1 \pmod{11}$ を示せ．

(2) p を素数とするとき $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ を示せ．

Problem 1

Let a, b, c be integers and write

$$a \equiv b \pmod{c}$$

if $a - b$ is a multiple of c. Also $n!$ stands for a factorial of n.

(1) Show $6! \equiv -1 \pmod 7$ and $10! \equiv -1 \pmod{11}$.

(2) If p is a prime, show $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

問 2

X を位相空間とし，f, g を X 上の実数値連続関数とするとき，以下に答えよ．

(1) 特に $X = \mathbb{R}^n$ のとき，$f + g$ と fg は，共に連続写像であることを示せ，ただし n は正の整数とする．

(2) 位相空間 X から $\mathbb{R}^2$ への写像

$$\Phi : X \ni x \mapsto (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$$

は連続写像となることを示せ．

(3) X が位相空間であるとき，$f + g$ と fg は，共に連続写像であることを示せ．

(4) X が位相空間であるとき，集合 $A = \{x \in X\,;\, f(x) = g(x)\}$ は閉集合となることを示せ．

Problem 2

Let f and g be real-valued continuous functions on a topological space X. Answer the following questions:

(1) Show the continuity of $f+g$ and fg respectively under the assumption that $X = \mathbb{R}^n$, where n is a positive integer.

(2) Show that the map of X into $\mathbb{R}^2$ given by

$$\Phi : X \ni x \mapsto (f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2$$

is continuous.

(3) Show the continuity of $f+g$ and fg respectively under the assumption that X is a topological space.

(4) Prove that $A = \{x \in X \,;\, f(x) = g(x)\}$ is a closed subset of the topological space X.

問 3

C^2 級の実数値関数 $u(x,t)$ が方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty,\ \ t > 0)$$

をみたすとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $u(x,t)$ が $\mathbb{R}$ 上の関数 $v(y)$ (ただし $y = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$) を用いて

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} v(\frac{x}{\sqrt{t}}) \tag{S}$$

と表されていたと仮定する．このとき $v(y)$ は

$$\frac{1}{2}\big(yv(y)\big)' + v''(y) = 0 \qquad (-\infty < y < \infty)$$

をみたすことを示せ．ただし $'$ は　y に関する微分を表す．

(2) $u(x,t)$ が (S) の形で与えられ，さらに

$$\lim_{|x|\to\infty} xu(x,t) = 0, \qquad \lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

をみたすとき，$v(y)$ について

$$v'(y) = -\frac{yv(y)}{2} \qquad (-\infty < y < \infty)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 前問 (2) の仮定の下で，$u(0,1) = 1$ をみたす $u(x,t)$ を求めよ．

Problem 3

Let $u(x,t)$ be a real-valued C^2-solution of the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty, \;\; t > 0).$$

Answer the following questions.

(1) Let $v(y)$ $(y = \dfrac{x}{\sqrt{t}})$ be a function over $\mathbb{R}$. Assume that $u(x,t)$ is written as

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} v(\frac{x}{\sqrt{t}}). \tag{S}$$

Show that $v(y)$ satisfies

$$\frac{1}{2}\big(yv(y)\big)' + v''(y) = 0 \qquad (-\infty < y < \infty),$$

where $'$ denotes the derivative in the variable y.

(2) Assume that $u(x,t)$ is the solution in the form (S) and satisfies

$$\lim_{|x|\to\infty} xu(x,t) = 0, \qquad \lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0.$$

Then show that $v(y)$ satisfies

$$v'(y) = -\frac{yv(y)}{2} \qquad (-\infty < y < \infty).$$

(3) Under the assumptions in (2), write down an explicit formula for the solution $u(x,t)$ satisfying $u(0,1) = 1$.

問 4

次の線形計画問題 $\mathcal{P}(\theta)$ を考える．

$$
\mathcal{P}(\theta) \quad
\begin{array}{llrrrcl}
\text{最大化} & : & 4x_1 & +(-3+\theta)x_2 & +7x_3 & & \\
\text{制約} & : & x_1 & +8x_2 & +2x_3 & \leq & 5 \\
 & & 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & \leq & 8 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

また，$\theta = 0$ のときの $\mathcal{P}(0)$ の最適解を (x_1^*, x_2^*, x_3^*) とする．以下の問に答えよ．

(1) 集合 S について，「S の任意の 2 点 x, y と $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす任意の実数 α に対して $\alpha x + (1-\alpha)y \in S$ となる」ときに，S は凸集合であると定義される．$\mathcal{P}(\theta)$ の実行可能集合 F，つまり，

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 5,\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 8,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$$

が凸集合の定義を満たすことを確認せよ．

(2) (x_1^*, x_2^*, x_3^*) を求めよ．

(3) (x_1^*, x_2^*, x_3^*) が $\mathcal{P}(\theta)$ の最適解でもあるような θ の範囲を求めよ．

Problem 4

For a linear programming problem $\mathcal{P}(\theta)$ parameterized by θ,

$$\mathcal{P}(\theta) \qquad \begin{array}{lcrrrcl} \text{maximize} & : & 4x_1 & +(-3+\theta)x_2 & +7x_3 & & \\ \text{subject to} & : & x_1 & +8x_2 & +2x_3 & \leq & 5 \\ & & 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & \leq & 8 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0, \end{array}$$

let us use (x_1^*, x_2^*, x_3^*) to denote an optimal solution of $\mathcal{P}(0)$ for the case $\theta = 0$.

(1) A set S is defined as a convex set if $\alpha x + (1-\alpha)y \in S$ holds for any $x, y \in S$ and any α such that $0 \leq \alpha \leq 1$. Let us use F to denote the feasible set of $\mathcal{P}(\theta)$, that is,

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 5,\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 8,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}.$$

Verify that F satisfies the above defintion.

(2) Compute (x_1^*, x_2^*, x_3^*).

(3) Compute the range of θ such that (x_1^*, x_2^*, x_3^*) is an optimal solution of $\mathcal{P}(\theta)$.

問 5

実数値確率変数の集合 $\Phi = \{X_1, X_2, \ldots\}$ が以下の (i), (ii) を満たすとき，問 (1), (2) に答えよ．ただし，P は確率，E は期待値を表し,「区間」は実数の開区間，閉区間，半開区間，およびそれらの高々可算個の和集合を表すものとする．

(i) $X_1, X_2, \ldots$ のうち，その値が区間 C に入るものの数を $N(C)$ とすると，

$$\mathsf{P}\bigl(N(C) = k\bigr) = e^{-|C|}\,\frac{|C|^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ここに $|C|$ は区間 C の長さを表す．

(ii) 任意の正整数 n と互いに排反な区間 $C_1, C_2, \ldots, C_n$，非負整数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ に対して，

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\bigl(N(C_1) = k_1,\ N(C_2) = k_2,\ \ldots,\ N(C_n) = k_n\bigr)\\ &= \mathsf{P}\bigl(N(C_1) = k_1\bigr)\,\mathsf{P}\bigl(N(C_2) = k_2\bigr)\cdots\mathsf{P}\bigl(N(C_n) = k_n\bigr)\end{aligned}$$

(1) 実数 $s \in [0, 1]$ と有界な区間 C に対して，$\mathsf{E}\bigl(s^{N(C)}\bigr) = e^{-(1-s)\,|C|}$ が成り立つことを示せ．

(2) n を自然数として，互いに排反で有界な区間 $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ と実数 $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n \in [0, 1]$ を用いて，関数 f を以下で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} s_i, & x \in C_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n, \\ 1, & x \notin \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} C_i \end{cases}$$

このとき，

$$\mathsf{E}\Bigl(\prod_{X_j \in \Phi} f(X_j)\Bigr) = \exp\Bigl\{-\int_{-\infty}^{\infty}\bigl(1 - f(x)\bigr)\,\mathrm{d}x\Bigr\}$$

が成り立つことを示せ．

Problem 5

In the following, P and E denote respectively the probability and its expectation, and the word "interval" stands for an open interval, a closed interval, a half-open interval, or a countable union of these on the real line. The set of real valued random variables $\Phi = \{X_1, X_2, \ldots\}$ satisfies (i) and (ii) below.

(i) Let $N(C)$ denote the number of X_1, X_2, ... whose values are in interval C. Then,

$$\mathsf{P}\big(N(C) = k\big) = e^{-|C|}\,\frac{|C|^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

where $|C|$ denotes the length of interval C.

(ii) For any positive integer n, mutually disjoint intervals C_1, C_2, ..., C_n, and nonnegative integers k_1, k_2, ..., k_n,

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\big(N(C_1) = k_1,\ N(C_2) = k_2,\ \ldots,\ N(C_n) = k_n\big)\\ &= \mathsf{P}\big(N(C_1) = k_1\big)\,\mathsf{P}\big(N(C_2) = k_2\big)\cdots\mathsf{P}\big(N(C_n) = k_n\big).\end{aligned}$$

Solve (1) and (2) below:

(1) Show that $\mathsf{E}\big(s^{N(C)}\big) = e^{-(1-s)\,|C|}$ holds for real number $s \in [0, 1]$ and bounded interval C.

(2) Define the function f such that, for a positive integer n, mutually disjoint and bounded intervals C_1, C_2, ..., C_n, and real numbers s_1, s_2, ..., $s_n \in [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} s_i, & x \in C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ 1, & x \notin \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} C_i. \end{cases}$$

Then, show that

$$\mathsf{E}\Big(\prod_{X_j \in \Phi} f(X_j)\Big) = \exp\Big\{-\int_{-\infty}^{\infty} \big(1 - f(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big\}.$$

問 6

$N(\mu, \sigma^2)$ を平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布とする．次のモデルにしたがって確率変数 (X_1, X_2) が生成されているとする:

$$\begin{aligned} &X_1 \sim N(0, \sigma^2),\ U \sim N(0,1) \\ &X_2 = \beta X_1 + U. \end{aligned}$$

ただし，X_1 と U は独立であり，$\beta \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}$ は未知パラメータで，$\sigma^2 > 0, |\beta| < 1$ を満たすものである．なお，$X \sim N(0, \sigma^2)$ は確率変数 X が $N(0, \sigma^2)$ から生成されているという意味である．今，観測値 (X_1, X_2) から $\beta,\ \sigma^2$ を推定したい．次の問に答えよ．

なお，平均 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$, 分散共分散 $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$（$\Sigma$ は正定値対称行列とする）の d 次元多変量正規分布の確率密度関数が次式で与えられることは用いて良い:

$$p(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d).$$

ここで，$\top$ はベクトルおよび行列の転置を表す．

(1) X_2 の平均と分散を求めよ．

(2) X_2 の分散が X_1 と等しいためには，σ^2 と β は $\sigma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ の関係を満たさなくてはいけないことを示せ．

(3) X_1 と X_2 の共分散 $\mathrm{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$ を求めよ (ただし μ_1 と μ_2 はそれぞれ X_1，X_2 の平均である)．

(4) (X_1, X_2) の同時分布を求めよ．ただし，$\mathbb{R}^d$ 値確率変数 X が平均 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$, 分散共分散 $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ の d 次元多変量正規分布に従う時，ある可逆行列 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ に対して，$Y = AX$ は平均 $A\boldsymbol{\mu}$，分散共分散 $A\Sigma A^\top$ の d 次元多変量正規分布に従うことを用いて良い．

(5) $\beta = 1/2$ がわかっているとき，観測値 (X_1, X_2) にもとづいて σ^2 の最尤推定量を求めよ．

Problem 6

Let $N(\mu, \sigma^2)$ be the normal distribution with mean μ and variance σ^2. Suppose that a pair of random variables (X_1, X_2) is generated from the following model:

$$\begin{aligned} &X_1 \sim N(0, \sigma^2),\ U \sim N(0, 1) \\ &X_2 = \beta X_1 + U, \end{aligned}$$

where X_1 and U are independently distributed, and $\beta \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}$ are unknown parameters satisfying $\sigma^2 > 0,\ |\beta| < 1$. Here, $X \sim N(0, \sigma^2)$ means that a random variable X is distributed from $N(0, \sigma^2)$. We want to estimate $\beta,\ \sigma^2$ based on the observation (X_1, X_2). Solve the following problems.

Remark: You may use the fact that the probability density function of the d-dimensional multivariate normal distribution with mean $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$, and variance-covariance $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ is given by

$$p(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d),$$

where $\top$ means transpose.

(1) Derive the mean and variance of X_2.

(2) Prove that $\sigma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ should be satisfied to ensure that the variance of X_2 is same as that of X_1.

(3) Derive the covariance $\mathrm{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$ of X_1 and X_2 (here, μ_1 and μ_2 are the means of X_1 and X_2 respectively).

(4) Derive the joint distribution of (X_1, X_2). You may use the fact that if a $\mathbb{R}^d$-valued random variable X obeys the d-dimensional multivariate normal with mean $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ and variance-covariance $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$, the random variable $Y = AX$ for an invertible matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ obeys the d-dimensional multivariate normal with mean $A\boldsymbol{\mu}$ and variance-covariance $A\Sigma A^\top$.

(5) Suppose that $\beta = 1/2$. Then, derive the maximum likelihood estimator of σ^2 based on the observation (X_1, X_2).

問 7

アルファベット $\{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$ 上の言語を考える．奇数長の文字列 $\alpha = x_1x_2\cdots x_{2n}x_{2n+1}$ （ただし $x_i \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$）に対して，

$$\mathrm{skip}(\alpha) = x_1x_3x_5\cdots x_{2n-1}x_{2n+1}$$

とする．つまり $\mathrm{skip}(\alpha)$ は α から偶数番目の文字 x_{2i} $(1 \leq i \leq n)$ を削除した文字列である．言語 L に対して

$$\mathrm{skip}(L) = \{\beta \mid \exists\alpha \in L\ (\alpha\ \text{は奇数長で}\ \mathrm{skip}(\alpha) = \beta)\}$$

とする．

(1) aa または ab で終わる文字列全体を受理する決定性有限オートマトンの状態遷移図を与えよ．

(2) 言語 $\{(\mathsf{aa})^n(\mathsf{bb})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が正規でないことを，ポンピング補題を用いて示せ．ただし $\mathbb{N}$ は 0 を含んだ自然数全体の集合 $\{0,1,2,\ldots\}$ である．

ポンピング補題 言語 X が正規であるならば，X に対して以下の条件を満たす自然数 p（ポンピング長）が存在する．

$$\begin{aligned}&\forall\sigma\Big[\Big(\sigma \in X\ \text{かつ}\ |\sigma| \geq p\Big)\ \text{ならば}\\&\qquad\exists\alpha,\exists\beta,\exists\gamma\Big(\sigma = \alpha\beta\gamma,\ |\alpha\beta| \leq p,\ |\beta| > 0,\ \text{かつ}\ (\forall n \in \mathbb{N})(\alpha\beta^n\gamma \in X)\Big)\Big].\end{aligned}$$

ただし $|\sigma|$ は文字列 σ の長さである．

(3) L_1 は正規でないが $\mathrm{skip}(L_1)$ は正規になる言語 L_1 の具体例を示せ．

(4) 一般に言語 L が正規ならば $\mathrm{skip}(L)$ も正規であることを証明せよ．

Problem 7

Consider languages over the alphabet $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. For a string $\alpha = x_1 x_2 \cdots x_{2n} x_{2n+1}$ ($x_i \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$) of odd length, define

$$\mathrm{skip}(\alpha) = x_1 x_3 x_5 \cdots x_{2n-1} x_{2n+1}.$$

$\mathrm{skip}(\alpha)$ is obtained by deleting the symbols x_{2i} ($1 \leq i \leq n$) with even indices from α. For a language L, define

$$\mathrm{skip}(L) = \{\beta \mid \exists \alpha \in L \text{ (the length of } \alpha \text{ is odd and } \mathrm{skip}(\alpha) = \beta)\}.$$

(1) Give the transition diagram of a deterministic finite automaton accepting all strings ending in aa or ab.

(2) Prove, by using the pumping lemma, that the language $\{(\mathsf{aa})^n(\mathsf{bb})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ is not regular, where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers including 0, i.e., $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Pumping Lemma: If X is a regular language, then there is a natural number p (the pumping length) satisfying the following condition:

$$\forall \sigma \Big[\Big(\sigma \in X \text{ and } |\sigma| \geq p \Big) \text{ imply } \\ \exists \alpha, \exists \beta, \exists \gamma \Big(\sigma = \alpha\beta\gamma,\ |\alpha\beta| \leq p,\ |\beta| > 0, \text{ and } (\forall n \in \mathbb{N})(\alpha\beta^n\gamma \in X) \Big) \Big]$$

where $|\sigma|$ is the length of a string σ.

(3) Give a language L_1 such that L_1 is not regular, but $\mathrm{skip}(L_1)$ is regular.

(4) Prove that if a language L is regular, then $\mathrm{skip}(L)$ is regular.

問 8

根付き2分木 (以下では単に木と呼ぶ) の節と葉が`tree_t`型の値として表され，次のような関数によって情報を得ることができるものとする．ただしすべての節はちょうど2つの子を持ち，葉は1つの整数を持つものとする．

`int is_leaf(tree_t t)`	`t`が葉の場合に1，節の場合に0を返す
`tree_t lft(tree_t t)`	`t`が節の場合に左の子を返す
`tree_t rgt(tree_t t)`	`t`が節の場合に右の子を返す
`int val(tree_t t)`	`t`が葉の場合に持っている整数値を返す

(1) `t` からたどれる葉の数が高々2 のときに 1，そうでないときに 0 を返す関数 `at_most_two(t)` を定義せよ．

(2) `t`からたどれる葉の数が3個であるような木の形をすべて図示せよ．葉を ◯，節を ● で表すものとする．

(3) `t` からたどれる葉の数が高々3 のときに 1，そうでないときに 0 を返す関数 `at_most_three(t)` を定義せよ．

(4) `t`からたどれる葉の数を求める関数 `leaves(t)` を再帰呼出しを用いて定義せよ．

(5) `leaves(t)` を再帰呼出しを用いずに定義せよ．ただし，キュー (待ち行列) がただ1つ用意されており，次のような関数によって操作することができる．

`void reset()`	キューを空にする
`void enqueue(tree_t t)`	`t`をキューの末尾に追加する
`int is_empty()`	キューが空のとき1，そうでないとき0を返す
`tree_t dequeue()`	キューの先頭要素を取り除いて返す

(注)　関数はJava, C, C++, C♯, Scalaいずれかの言語のメソッドまたは関数として書け．文法の誤りは，誤解が生じない範囲であれば減点しない．

Problem 8

Consider a rooted binary tree (hereafter called *a tree*) whose nodes and leaves are represented as values of datatype `tree_t`. The following functions provide information of nodes and leaves. Note that every node has exactly two children, and that every leaf has one integer value.

`int is_leaf(tree_t t)`	returns 1 when `t` is a leaf; returns 0 otherwise
`tree_t lft(tree_t t)`	returns the left child when `t` is a node
`tree_t rgt(tree_t t)`	returns the right child when `t` is a node
`int val(tree_t t)`	returns the integer value in `t` when `t` is a leaf

(1) Define a function `at_most_two(t)` that returns 1 when at most two leaves are reachable from `t`. Otherwise, it returns 0.

(2) Draw all possible shapes of trees that have exactly three leaves reachable from `t`. Leaves and nodes should be denoted by ◯ and •, respectively.

(3) Define a function `at_most_three(t)` that returns 1 when at most three leaves are reachable from `t`. Otherwise, it returns 0.

(4) Define a function `leaves(t)` that returns the number of leaves reachable from `t`. The function must be defined by using recursive calls.

(5) Define `leaves(t)` without using recursive calls. You can assume that there is one and only one queue, which is manipulated through the following functions.

`void reset()`	makes the queue empty
`void enqueue(tree_t t)`	adds `t` to the end of the queue
`int is_empty()`	returns 1 when the queue is empty; otherwise 0
`tree_t dequeue()`	removes and returns the first element in the queue

(Note) Functions must be written as functions or methods in Java, C, C++, C♯ or Scala. Points are not taken off by syntactic errors as long as they do not cause misunderstanding.

問 9

(1) 機械語とアセンブリ言語の違いについて説明しなさい.（3 行程度）

(2) C 言語のコンパイラはネイティブコードを出力する．一方，Java のバイトコードコンパイラは仮想機械コードを出力する．ネイティブコードの実行と仮想機械コードの実行について，技術的な違いを明らかにした上で，仮想機械コードを利用することの利害得失を論じなさい.（10 行程度）

(3) オペレーティングシステムが果す重要な役割のひとつに低レベルのハードウェア資源の抽象化がある．このような抽象化機能から 3 つの例を挙げ，それぞれについて抽象化の対象となるハードウェア資源を述べ，ハードウェアの機能がオペレーティングシステムにとってどのように抽象化されるかを説明せよ.（計 10 行程度）

Problem 9

(1) Describe the difference between an assembly language and a machine language. (approximately three lines)

(2) A C compiler generates native code, while a Java byte-code compiler generates virtual machine code. Explain the technical difference between native-code execution and byte-code execution, and discuss the advantages and the disadvantages of the use of virtual machine code. (approximately 10 lines)

(3) One of the important roles of the operating system is provision of abstraction layer of the underlying hardware resource. Give three examples of such abstraction mechanisms. For each, describe the hardware resource, and explain how the abstract view of its functionality is established by the operating system. (approximately 10 lines in total)