筆答専門試験科目（午前）　　　　　２０２０大修

情報工学系

時間　９：３０〜１２：３０

注　意　事　項

1. 各解答用紙に受験番号を記入せよ．
2. 次の５題のうち，１番〜３番の３題は必ず解答し，４番と５番からは１題を選び解答すること．
3. 解答は１題ごとに別々の解答用紙に，問題番号を明記した上で記入せよ．必要であれば，解答用紙の裏面に記入して良いが，解答用紙の表面にその旨を明記すること．
4. １枚の解答用紙に２題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある．
5. １題の解答を２枚以上の解答用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある．
6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．

1．以下の問いに答えよ．

1) 以下の極限を求めよ．

a) $\lim_{x\to\infty}\{\log_e(2x+3)-\log_e(x)\}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-\cos x}{x}$

2) 以下の実行列の積の行列式を計算せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 2 & 1 \\ x^2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 31 & 23 & 17 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3) 以下の確率密度関数$f_X(x)$に従う連続型確率変数Xの分散 $V(X)$，累積分布関数$F_X(x)$を各々求めよ．ただし，$\lim_{x\to +0} x^n\log_e(x)=0$ (nは 1 以上の整数)とする．

$$f_X(x)=\begin{cases} -4x\log_e(x) & 0<x\leq 1 \\ 0 & x\leq 0 \text{ または } x>1 \end{cases}$$

4) ある製造ラインで生産された製品は 1/1000 の確率で不良品である．不良品を 99/100 の確率で正しく不良品と判定し，かつ，不良品でないものを 4/5 の確率で正しく不良品ではないと判定する検査手法がある．この製造ラインにおいて，この手法が不良品と判定した製品が，不良品である確率を求めよ．

5) あるカジノで，４個のポケット A，B，C，D に区切られたルーレットがある．カジノの説明ではそれぞれのポケットにボールが入る確率は同じであるとされている．そのルーレットを５回試行したところ，ボールはポケット A に４回入った．カジノの説明とは異なる「このルーレットはボールがポケット A により入りやすい」という仮説を，有意水準 5%で検定せよ．解答には帰無仮説H_0，対立仮説H_1を明記すること．

2. 以下の問いに答えよ．

1) 命題論理について考える．命題 φ を $(\neg p_0 \to \neg p_1) \wedge (\neg p_1 \to p_0)$ とする．ただし，p_0，p_1 は命題記号である．

a) 以下の表が φ の真理値表になるように（ア）〜（エ）にあてはまる値を答えよ．ただし，1 は真を表し，0 は偽を表す．

p_0	p_1	φ
0	0	(ア)
0	1	(イ)
1	0	(ウ)
1	1	(エ)

b) 命題 φ が恒真 (トートロジー) であるか否か答えよ．

c) 命題 φ が充足可能であるか否か答えよ．

2) 命題論理の自然演繹について考える．p_1，p_2，p_3 は命題記号であり，$\wedge I$ は連言の導入規則，$\wedge E_L$ は連言の除去規則（左），$\wedge E_R$ は連言の除去規則（右），$\to E$ は含意の除去規則である．

a) $(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$ を仮定とし，$p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$ を結論とする以下の自然演繹の導出（証明図）を完成させたい．（ア）〜（オ）にあてはまる命題を答えよ．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3}{(\text{ア})}\wedge E_L}{p_1}\wedge E_L \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3}{(\text{イ})}\wedge E_L}{(\text{ウ})}\wedge E_R \qquad \dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3}{(\text{エ})}\wedge E_R}{(\text{オ})}\wedge I}{p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)}\wedge I$$

b) $p_1 \wedge p_2$ と $p_1 \to (p_2 \to p_3)$ を仮定とし，p_3 を結論とする以下の自然演繹の導出（証明図）を完成させたい．（ア）〜（エ）にあてはまる命題を答えよ．

$$\dfrac{\dfrac{(\text{ア})}{p_2}\wedge E_R \qquad \dfrac{\dfrac{(\text{イ})}{p_1}\wedge E_L \qquad (\text{ウ})}{(\text{エ})}\to E}{p_3}\to E$$

c) 命題の集合 $\{\neg p_0 \to \neg p_1,\ \neg p_1 \to p_0\}$ が矛盾するか無矛盾であるかを答え，その理由を述べよ．

（次ページにつづく）

（前ページのつづき）

3) 一階述語論理について考える．

a) 以下の論理式のモデルは存在するか．存在するならば，モデルのユニバースの濃度の最小値を答えよ．存在しないならば，その理由を述べよ．

$$\exists x \exists y \exists z\ \neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x)$$

b) 以下の論理式のモデルは存在するか．存在するならば，そのモデルを 1 つ挙げよ．存在しないならば，その理由を述べよ．

$$\exists x \forall y (x = y)$$

4) 一階述語論理の自然演繹について考える．以下が成り立つか否か答え，その理由を述べよ．ただし，P はアリティ 2 の述語記号とする．

$$\vdash (\forall x \exists y P(x, y)) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$$

3.

1) n 個の要素からなる整数の配列 a を昇順に整列させる処理を，二つの異なるアルゴリズムに基づきC言語で実装した．プログラム 3.1，3.2 のキャプション $\boxed{\quad A \quad}$，$\boxed{\quad B \quad}$ を埋めるのに最も適切なアルゴリズムの名称を選択肢から選び，その記号を答えよ．

【選択肢】

ア．選択ソート　　イ．バブルソート　　ウ．クイックソート　　エ．挿入ソート

プログラム 3.1: $\boxed{\quad A \quad}$

```c
void sort_a(int a[], int n)
{
  int i, j, tmp;

  for (i = 0; i < n - 1; ++i) {
    for (j = n - 1; i < j; --j) {
      if (a[j] < a[j-1]) {
        tmp = a[j];
        a[j] = a[j-1];
        a[j-1] = tmp;
      }
    }
  }
}
```

プログラム 3.2: $\boxed{\quad B \quad}$

```c
void sort_b(int a[], int n)
{
  int i, j, tmp;

  for (j = 1; j < n; ++j) {
    tmp = a[j];
    i = j - 1;
    while (0 <= i && tmp < a[i]) {
      a[i+1] = a[i];
      --i;
    }
    a[i+1] = tmp;
  }
}
```

2) ヒープソートに関して，次の問いに答えよ．ただし，n は正の整数とする．

a) 二分ヒープにおいて，根以外の任意の節点の値が満たすべき条件を説明せよ（max ヒープ条件と min ヒープ条件のどちらでもよい）．

b) 二分ヒープが n 個の要素を格納しているとき，その木の高さを n の式で表せ．なお，木の高さは，根と葉を結ぶ路の長さの最大値として定義される．

c) ヒープソートで n 個の要素を整列させるとき，その平均時間計算量と最悪時間計算量の漸近的評価として，最も適切なものを以下の選択肢からそれぞれ答えよ．

【選択肢】

ア．$\mathcal{O}(1)$　　イ．$\mathcal{O}(\log n)$　　ウ．$\mathcal{O}(n)$

エ．$\mathcal{O}(n \log n)$　　オ．$\mathcal{O}(n^2)$

3) $A = \langle A[0], A[1], ..., A[n-1] \rangle$ を n 個の相異なる整数の配列とする．n 未満の非負整数 i, j に対し，$i < j$ かつ $A[i] > A[j]$ のとき，対 (i, j) を A の反転と呼び，A の反転の数を A の反転数と呼ぶ．例えば，配列 $\langle 5, 7, 4, 6 \rangle$ の反転は $(0,2), (1,2), (1,3)$ であり，反転数は 3 である．次の問いに答えよ．

a) 配列 $\langle 1, 0, 4, 3, 2 \rangle$ の反転数を求めよ．

b) 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の要素をすべて並べた配列（要素数は n 個）の中で，反転数が最大となるものを示せ．また，その反転数を n の式で表せ．

c) 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の要素をすべて並べた任意の配列 B（要素数は n 個）をバブルソートで昇順に整列させる．このとき，「バブルソートにおける $\boxed{\quad X \quad}$ と配列 B の反転数は等しい」という関係が成り立つ．$\boxed{\quad X \quad}$ を埋めるのに適切な語句と，その関係が成り立つ理由を簡潔に答えよ．

4) プログラム 3.3（次ページ）は，整数の配列を昇順に整列させる処理を，マージソートのアルゴリズムに基づき，C 言語で実装したものである．次の問いに答えよ．

a) 空欄 【 A 】,【 B 】,【 C 】,【 D 】,【 E 】 を埋めるのに適切なコードを，次ページの選択肢から選び，プログラムを完成させよ．ただし，整列させたい配列を a，整列時の作業領域に用いる配列を w とし，mergesort 関数を以下の 2 行のコードで呼び出すこととする．

```c
int a[5] = {3, 5, 1, 4, 2}, w[5];
mergesort(a, 0, 4, w);
```

（次ページにつづく）

（前ページのつづき）

【選択肢】

ア. a[k] = w[i]	イ. a[k] = w[i++]	ウ. a[k] = w[++i]
エ. a[k] = w[j]	オ. a[k] = w[j++]	カ. a[k] = w[++j]
キ. a[k] = w[k]	ク. a[k] = w[k++]	ケ. a[k] = w[++k]
コ. w[k] = a[i]	サ. w[k] = a[i++]	シ. w[k] = a[++i]
ス. w[k] = a[j]	セ. w[k] = a[j++]	ソ. w[k] = a[++j]
タ. w[k] = a[k]	チ. w[k] = a[k++]	ツ. w[k] = a[++k]

b) a) に示したコードで mergesort 関数を呼び出したとき，標準出力の 1 行目に (0,4) が書き出される．3 行目，5 行目，7 行目に書き出される内容をそれぞれ答えよ．

c) mergesort 関数が引数で指定された範囲の配列の要素を整列させるまでにプログラム 3.3 の 18 行目を実行した回数の総数（要素の比較回数）を求めたい．そこで，17 行目を（コメントアウトを外して）++c; に変更したが，これだけでは不十分である．以下の 2 行のコードで比較回数を変数 count に格納するには，プログラム 3.3 をどのように変更すればよいか答えよ．

```
int a[5] = {3, 5, 1, 4, 2}, w[5];
int count = mergesort(a, 0, 4, w);
```

ただし，大域変数や静的変数を使ってはいけない．また，17 行目の変更に加えて行うプログラムの変更は 3 回までの行の差し替えに限定する．行の差し替えとは，ある行のコードを 60 文字以内（空白文字は数えない）の別のコードに置き換えることを指す．解答の際は，以下の【答案の書き方（例）】のように，変更する行の番号と差し替え後のコードを記すこと．17 行目のコメントは外してあることとし，それ以外に必要な変更を記述すること．

【答案の書き方（例）】

・6 行目： printf("Hello\n");

・30 行目： c = end - begin + 1;

プログラム 3.3: マージソート

```
1  int mergesort(int a[], int begin, int end, int w[])
2  {
3    int mid = (begin + end) / 2;
4    int i = begin, j = mid + 1, k, c = 0;
5
6    printf("(%d,%d)\n", begin, end);
7    if (begin < end) {
8      mergesort(a, begin, mid, w);
9      mergesort(a, mid + 1, end, w);
10
11     for (k = begin; k <= end; ++k) {
12       if (mid < i) {
13         【 A 】;
14       } else if (end < j) {
15         【 B 】;
16       } else {
17         /* ++c; */
18         if (a[i] < a[j]) {
19           【 C 】;
20         } else {
21           【 D 】;
22         }
23       }
24     }
25
26     for (k = begin; k <= end; ++k) {
27       【 E 】;
28     }
29   }
30
31   return 0;
32 }
```

4. 実数$t(\geq 0)$を変数とする 2 回微分可能な実関数$f(t)$のラプラス変換$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$を次式で定義する.

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

ここで, sは複素変数で, かつ実部が正であるとする. 以下の問いに答えよ. なお, 解答にあたって, 次のラプラス変換に関する関係式を用いてもよい.

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}f(t)]=F(s+\alpha) \tag{4.2}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]=sF(s)-f(0) \tag{4.3}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)\right]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0) \tag{4.4}$$

ただし, αは実定数とし, $f'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$とする.

1) 以下の a)〜c)の式が成り立つことを示せ. ただし, αは実定数, βは 0 ではない実定数とする.

a) $\mathcal{L}[\cos(\beta t)]=\dfrac{s}{s^2+\beta^2}$

b) $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\beta t)]=\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

c) $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\beta t)]=\dfrac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

2) 次の微分方程式について, 以下の a)〜d)に答えよ.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)+\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+2f(t)=2 \tag{4.5}$$

ここで, ηは実定数, $f(t)$は実数$t(\geq 0)$を変数とする 2 回微分可能な実関数とし, 初期条件を$f(0)=1$, $f'(0)=1$とする. ただし, $f'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$, $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$とする.

a) 微分方程式(4.5)の両辺をラプラス変換し, $F(s)$をsの関数として表せ.
b) $\eta=0$のとき, ラプラス変換を用いて微分方程式(4.5)を解き, $f(t)$をtの関数として表せ.
c) $\eta=2$のとき, ラプラス変換を用いて微分方程式(4.5)を解き, $f(t)$をtの関数として表せ.

d) $\eta=2$のとき, $\lim_{t\to\infty}f(t)$の値を求め, $f(t)$のグラフの概形を描け.

(次ページにつづく)

（前ページのつづき）

3) 図 4.1 に示した 1 自由度のバネ－質量－ダンパ系の微分方程式は次式で表せる．

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + kx(t) = p(t) \tag{4.6}$$

ただし，位置$x(t)$および外力$p(t)$は時刻$t(\geq 0)$の 2 回微分可能な実関数である．位置$x(t)$の原点はバネの自然長の位置とし，位置$x(t)$と外力$p(t)$の正の方向はバネが伸びる方向とする．質量m，バネ定数k，ダンパの粘性減衰係数μは正の定数とする．以下では，式(4.6)の係数の書き換えによって得られた次式を用いて考える．

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + 2\gamma\omega_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + \omega_0^2 x(t) = q(t) \tag{4.7}$$

ただし，$\omega_0 = \sqrt{k/m}$，$\gamma = \mu/(2\sqrt{mk})$，$q(t) = p(t)/m$と定義した．また，$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$，$Q(s) = \mathcal{L}[q(t)]$とする．初期条件を$x(0) = 0$，$x'(0) = 0$とする．$x'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$である．このとき，以下の a)～e)に答えよ．

a) 式(4.7)の両辺をラプラス変換して，伝達関数$H(s) = X(s)/Q(s)$を計算し，$H(s)$をγ，ω_0 を用いてsの関数として表せ．
b) 伝達関数$H(s)$において，sを$i\omega$に置き換えることにより，$Y(\omega) = 20\log_{10}|H(i\omega)|$ を計算し，$Y(\omega)$をω の実関数として表せ．ただし，ωは正の実数，iは虚数単位とする．
c) $Y(\omega)$が最大となるときのωの値を$\hat{\omega}$とする．$\hat{\omega}$をγ，ω_0を用いて表せ．
d) $Y(\omega)$が$\omega = \hat{\omega}$で最大になるという現象は何と呼ばれるか，答えよ．
e) d)の現象が起こるγの範囲を答えよ．

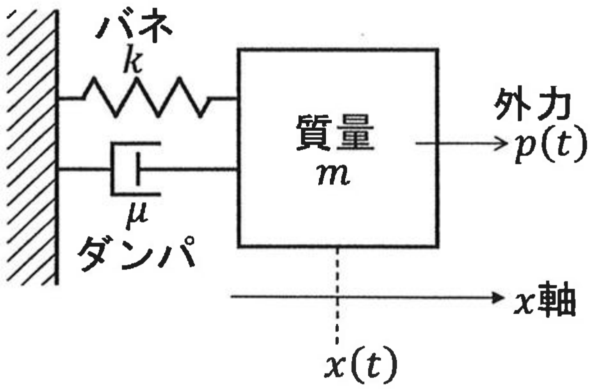

図 4.1:　1 自由度のバネ－質量－ダンパ系

5.

図 5.1 のように構成された，ck を入力とし z_2, z_1, z_0 を出力とする論理回路 X を考える．ここで R_0, R_1, R_2 はポジティブエッジトリガ型（前縁トリガ型）D フリップフロップであり，初期化時の出力は 0 とする．また F は x_2, x_1, x_0 を入力とし y_2, y_1, y_0 を出力とする論理回路であり，図 5.2 のように構成されている．A および B は図 5.3 に示されている 2 入力ゲートのいずれかとする．回路 X の入力 ck に 1 単位時間を周期とするクロックパルスを与える．以下 n を正整数，t を時刻とする．時刻 $t = 0$ において R_0, R_1, R_2 は初期化されており，時刻 0 以降 n 個目のクロックパルスの立ち上がりによる出力が時刻 $t = n$ において z_2, z_1, z_0 に安定して得られるとする．この様子を図 5.4 に示す．以降，回路の構成要素（ゲート，フリップフロップおよび配線）による遅延はクロックパルスの周期と比較して十分小さく無視できるとする．

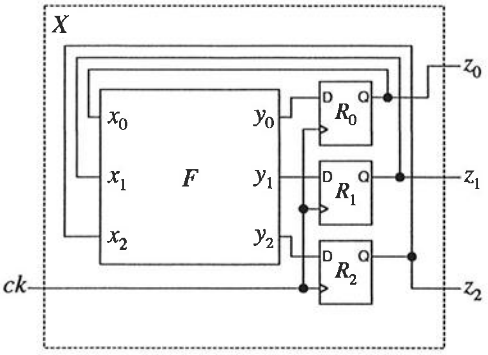

図 5.1: 論理回路 X

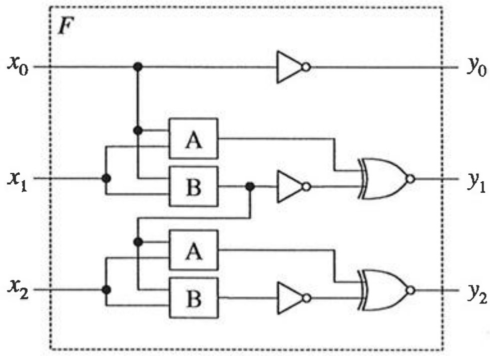

図 5.2: 論理回路 F

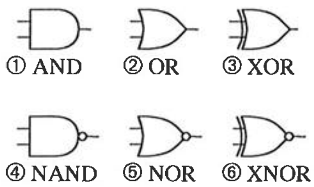

図 5.3: 2 入力ゲート

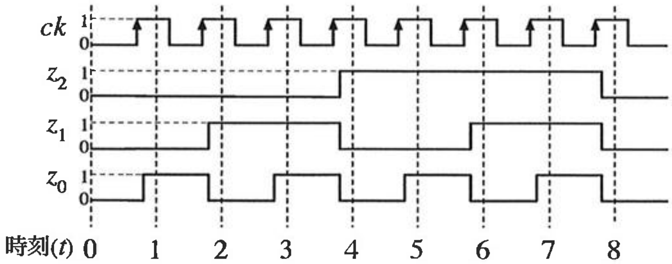

図 5.4: 回路 X の動作

1) 以下の問い **a)**〜**f)** に答えよ．

a) 回路 F の出力 y_2, y_1, y_0 は入力 x_2, x_1, x_0 の値のみで決まる．このような動作を行う回路の名称として最も適切なものを以下の選択肢から一つ選び記号①〜④で答えよ．

① 非同期回路　② 組み合わせ回路
③ 順序回路　④ 非線形回路

b) 時刻 $t = n$ における回路 X の出力 z_2, z_1, z_0 は，時刻 $t =$ ア における y_2, y_1, y_0 の値それぞれと等しい．ア を n の式として表せ．

c) 回路 X が図 5.4 に示すような動作をするための，回路 F の動作を表す真理値表を図 5.5 に示す表形式で完成させよ．

x_2	x_1	x_0	y_2	y_1	y_0
0	0	0	0	0	1
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

図 5.5: 回路 F の動作

(次ページにつづく)

(前ページのつづき)

d) 図 5.4 のような動作を行う回路の名称として最も適切なものを以下の選択肢から一つ選び記号①〜④で答えよ.

① デコーダ　② マルチプレクサ　③ カウンタ　④ シフトレジスタ

e) 回路 X を図 5.4 のように動作させるためには図 5.2 の A および B にはそれぞれ何が入るか. 図 5.3 から選び記号①〜⑥で答えよ. 同一のゲートを複数回用いてもよい.

f) 論理変数 x と y の論理積 (AND) を xy, 論理和 (OR) を $x+y$, x の否定 (NOT) を $\bar{x}$ と表記する. 回路 F の出力 y_2 を x_0, x_1, x_2 の NOT-AND-OR 形式（積和標準形）で項数が最小となるよう簡単化した式で表せ.

2) 図 5.6 に示す G は x_2, x_1, x_0 を入力とし y_2, y_1, y_0 を出力とする論理回路である. G を用いて, ck を入力とし z_2, z_1, z_0 を出力とする論理回路 Y を図 5.7 のように構成する. さらに Y を用いて図 5.8 に示す論理回路 X' を構成する. 図 5.8 の C および D は図 5.3 に示されている 2 入力ゲートのいずれかである. 以下の問い **a)**〜**e)** に答えよ.

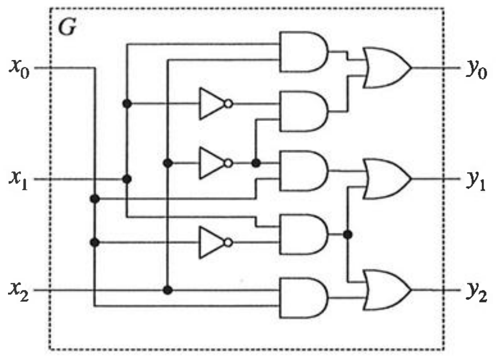

図 5.6: 論理回路 G

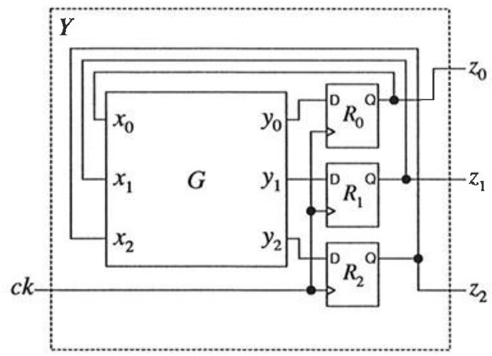

図 5.7: 論理回路 Y

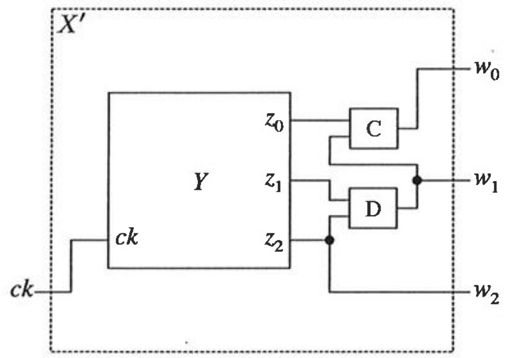

図 5.8: 論理回路 X'

時刻 (t)	z_2	z_1	z_0
0	0	0	0
1			
4			
7			
12			

図 5.9: 回路 Y の動作

a) 回路 G では出力 y_0 を得るためにゲートを 5 個用いている. 図 5.3 に挙げたゲート 2 個以下を用いて G における y_0 と同じ出力を得ることができる回路を一つ記せ.

(次ページにつづく)

(前ページのつづき)

b) 回路 Y の入力 ck に 1 単位時間を周期とするクロックパルスを与える．時刻 $t = 0$ において R_0, R_1, R_2 は初期化されているとし，時刻 0 以降の n 個目のクロックパルスの立ち上がりによる出力が時刻 $t = n$ において z_2, z_1, z_0 に安定して得られるとする．時刻 $t = 1, 4, 7, 12$ における回路 Y の出力 z_2, z_1, z_0 を図 5.9 に示す表形式で完成させよ．

c) m を非負整数とする．上記 **b)** で示した条件下での時刻 $t = m$ における回路 Y の出力の組 (z_2, z_1, z_0) をベクトルとみなし $\mathbf{z}(m)$ と表記する．$\mathbf{z}(m)$ と $\mathbf{z}(m+1)$ のハミング距離の最大値を答えよ．

d) 図 5.8 の回路 X' と図 5.1 の回路 X は同等のふるまいを示す．このとき図 5.8 の C および D に入るゲートを図 5.3 から選び，記号①～⑥で答えよ．同一のゲートを複数回用いてもよい．ここで同等のふるまいとは以下のことをいう．X' と X それぞれの入力 ck に図 5.10 のように同一のパルス発生源 P から 1 単位時間を周期とするクロックパルスを与える．時刻 $t = 0$ において X' および X 内の D フリップフロップは初期化されているとし，時刻 0 以降の n 個目のクロックパルスの立ち上がりによる出力が時刻 $t = n$ において w_2, w_1, w_0 および z_2, z_1, z_0 それぞれに安定して得られているとき，$w_2 = z_2$ かつ $w_1 = z_1$ かつ $w_0 = z_0$ である．

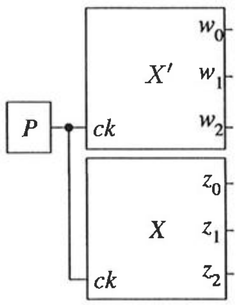

図 5.10

e) 図 5.11 のような論理回路を考える．時刻 $t = t_0$ において入力 x と y が 0 から 1 に同時に変化したとする．このとき出力 z は 0 のまま変化しないことが期待されるが，NOT ゲートにおける遅延が原因で図 5.12 に示すようなパルスが生じることがある．この現象はグリッチ（あるいはハザード）と呼ばれ，接続される回路によっては誤動作の原因となり得る．図 5.8 の回路 X' において，ゲート C, D における遅延が無視できない場合に出力 w_0 においてグリッチが発生し得るか否かを述べ，発生し得るなら対策方法を，発生しないならその理由を 100 文字以内で記せ．ただし回路 Y の構成要素（ゲート，フリップフロップおよび配線）による遅延は無視できるものとし，R_0, R_1, R_2 それぞれの出力は同時に変化するものとする．

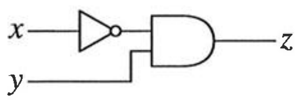

図 5.11: グリッチを生じ得る論理回路の例

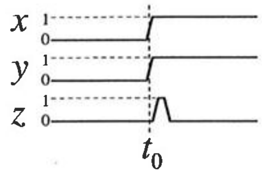

図 5.12: グリッチの例