専門科目　電気電子系 (午前)　31 大修

時間 9:30 〜 11:00

数学

注 意 事 項

1. 大問 1, 2, 3 の解答はそれぞれ別の答案用紙に記入せよ。

2. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号, 試験科目名欄に試験科目名を記入せよ。

3. 電子式卓上計算機などの使用は認めない。

----【問題修正内容】------------------------------

「数学」(大問2-(1)　2行目)

修正前:　・・周回積分することを・・・

修正後:　・・反時計回りに周回積分することを・・・

問 題 分 野
数学

1. xとtの関数yに関する2階偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}\left[\ln S(x)\right]$$

について以下の問に答えよ。但し，$S(x) = S_1 e^{m(x-x_1)}$ および $y = \phi(x) e^{jqt}$とし，

p, q, m, S_1, x_1は正の定数とする。また，$\ln S(x)$は$S(x)$の自然対数を表し，

虚数単位をjで表す（$j^2 = -1$）。

1) 上記の偏微分方程式が$\left(\frac{d^2}{dx^2} + A\frac{d}{dx} + B\right)\phi(x) = 0$と表される。係数$A, B$を求めよ。

2) 1)で示した微分方程式の一般解は$\phi(x) = e^{-\beta x}\left(Ce^{j\alpha x} + De^{-j\alpha x}\right)$となる。実数係数$\alpha$，$\beta$を，定数$p, q, m$を用いて表せ。また$\alpha$が実数となる条件も示せ。但し$\alpha > 0$とする。

2. 複素関数に関する以下の問に答えよ。なお虚数単位を j で表す($j^2=-1$)。

1) 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z-p}$ を，この関数の特異点 p (p は複素数)を内側にもつ積分路 C に沿って周回積分することを考える。$z-p=re^{j\phi}$ と置くことで $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z-p}=2\pi j$ となることを示せ。ただし，r と ϕ は共に実数であり，$r>0$ とする。

2) 下記に示す式(2.1)の定積分を考える。a は定数である。

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} \qquad |a|<1 \qquad (2.1)$$

a) 関数 $g(\theta)=\dfrac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}$ は，$g(\theta)=\dfrac{1}{\left(1-ah(\theta)\right)\left(1-a/h(\theta)\right)}$ の形で表される。関数 $h(\theta)$ を求めよ。導出過程を示すこと。

b) $z=e^{j\theta}$ と置くことで，式(2.1)を z の積分式として表せ。

c) 式(2.1)の定積分を求めよ。

問 題 分 野
数学

3． 周期 N 点の実数の離散時間信号 $f(n)$ を考える。式(3.1)で定義される離散フーリエ変換 $F(k)$ に関する以下の問に，導出過程も含めて答えよ。ただし，n，および k は整数であり，N は自然数である。また，虚数単位を j で表す($j^2=-1$)。

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (3.1)$$

1) $f(-n)$ の離散フーリエ変換を考える。

a) $n=N-m$ とし，$f(-n)$ の離散フーリエ変換を n を用いずに表せ。ただし，m は整数である。

b) $f(n)$ の周期性を考慮して，1)の a)で導出した式が $F(-k)$ となることを示せ。

2) ある整数 m に対して $f(n-m)$ の離散フーリエ変換が $F(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$ となることを示せ。

3) 1 Hz 未満に帯域制限された連続時間信号 $g(t)$ に対して，時刻 $t=0$ からサンプリング周波数 2Hz で 2 秒間サンプリングしたところ，［3，0，−1，2］の離散時間信号を得た。

a) 得られた離散時間信号を $f(n)$ (ただし，$n=0$，1，2，3)とし，$k=0$，1，2，3 に対する $F(k)$ をそれぞれ求めよ。

b) 3)の a)で導出した $F(k)$ から，$g(t)$ を求めよ。

専門科目　電気電子系 (午後 1)　31 大修

時間 13:30 ～ 15:00

電磁気学

注 意 事 項

1. 大問 1, 2, 3 の解答はそれぞれ別の答案用紙に記入せよ。

2. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号, 試験科目名欄に試験科目名を記入せよ。

3. 電子式卓上計算機などの使用は認めない。

---

1. 真空中に置かれた半径 a の円柱状誘電体に，中心軸方向の単位長さあたりλの正の固定電荷が分布している。円柱は半径に比べて十分に長く，円柱端部における電界の乱れは無視する。誘電体の比誘電率をε_r，真空の誘電率はε_0とする。また，誘電体の透磁率は真空の透磁率μ_0と等しいものとする。

1) 円柱が静止している場合を考える。図 1.1 において，円柱の中心軸上の点 O から，中心軸に直交する方向に距離rの点 P をとる。

a) 固定電荷が円柱の表面にのみ一様に分布しているとき，点 P における電界強度を求めよ。$r > a$ と $0 < r < a$ の場合についてそれぞれ求めること。

b) 固定電荷が円柱内に一様に分布しているとき，点 P における電界強度を求めよ。$r > a$ と $0 < r < a$ の場合についてそれぞれ求めること。

c) 円柱の中心から距離r_1の点 P_1 にある電荷量qの電荷を，図 1.2 のように円柱の中心から距離r_2の点 P_2 に移動させた。この移動に必要な仕事を求めよ。ただし，$r_1 > r_2 > a$ とする。また，電荷の電荷量は十分に小さく，円柱の電荷による電界に影響を及ぼすことはない。

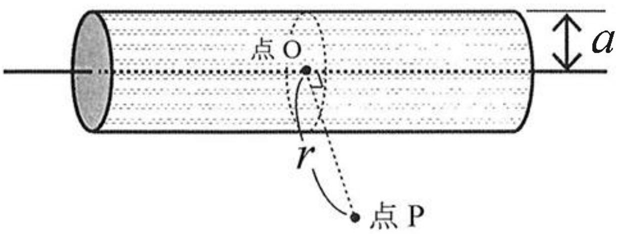

図 1.1

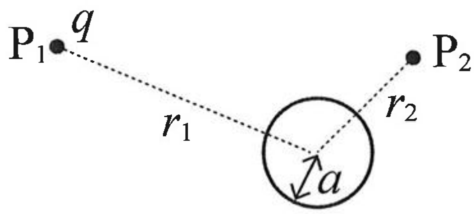

図 1.2

2)　固定電荷が表面にのみ一様に分布している円柱を, 図 1.3 のようにその中心軸を中心にゆっくり回転させる。このとき，表面に固定された電荷の移動速度は光速よりも十分に小さい。

a) 一定の角速度ωで回転すると, 円柱表面には電流が流れていると見なせる。このとき，表面電流密度を求めよ。

b) 円柱が一定の角速度ωで回転しているとき，円柱内部の磁束密度を求めよ。

c) 回転速度を$\omega = kt$ のように時間tとともに緩やかに増加させる。このとき，円柱の中心軸から距離rの点における電界強度を求めよ。ただし，kは定数とし，$t > 0$および$r < a$とする。

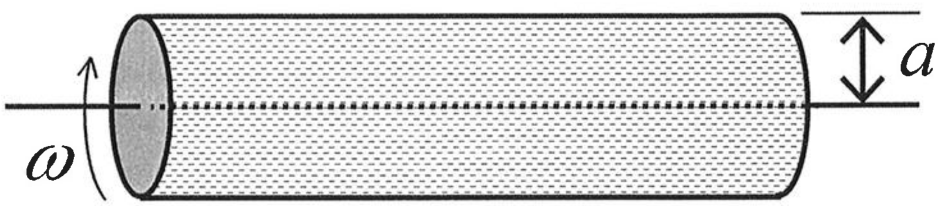

図 1.3

2. 電気映像法に関する以下の問に答えよ。導体や電荷は全て真空中にあり，真空の誘電率をε_0とする。導体端面における電界の乱れは無視する。原点をO$(0,0,0)$とする。

1) 図 2.1 のように，接地された無限に広い平面状の完全導体から距離hの位置$(h,0,0)$に，正の電荷量qを持つ点電荷を置く。

a) 映像電荷の位置と電荷量を示せ。

b) 点電荷に働く力の方向と大きさを求めよ。

c) $x>0$の任意の点における電位は，真電荷による電位と映像電荷による電位の和となる。点$(x,y,0)$における電位を求めよ。

d) 導体表面に誘起される電荷は，導体表面における電界強度から求めることができる。原点 O$(0,0,0)$から距離rの位置における面電荷密度を求めよ。

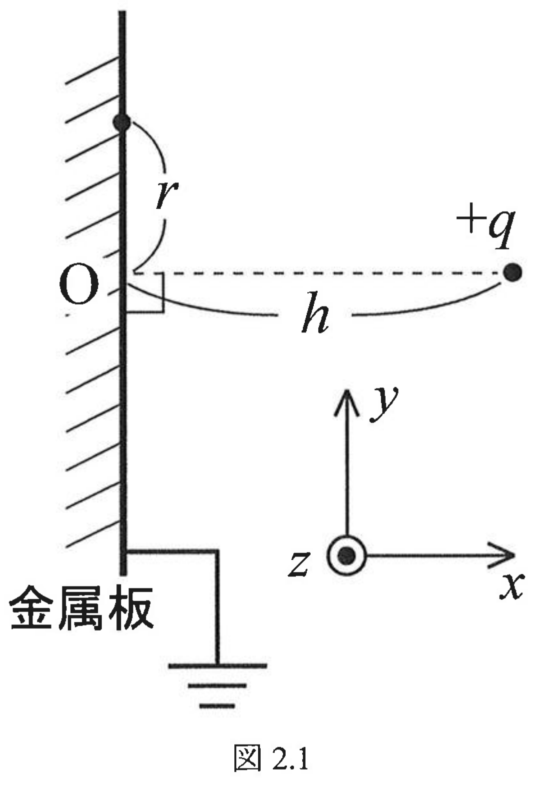

図 2.1

2) 図 2.2 のように，2 点 $\mathrm{A}(0,h,0)$と $\mathrm{B}(0,-h,0)$にそれぞれ$+q$と$-q$の電荷が置かれた電気双極子を考える。

a) 点 $\mathrm{P}(x,y,0)$の電位は，

$$V = \frac{qh}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{y}{r^3}$$

となることを示せ。r は双極子の中心から点 P までの距離であり，$r = \sqrt{x^2+y^2}$である。また，$r \gg 2h$として，hに関する二次の項は無視してよい。また，δが十分に小さいときに成り立つ近似式，$(1+\delta)^n \cong 1+n\delta$を用いてよい。

b) 点 P がx軸上にあるとき，点 $\mathrm{P}(x,0,0)$におけるx方向およびy方向の電界を求めよ。

3) $+q$と$-q$の電荷が$2h$ 離れて置かれた電気双極子を，図 2.3 のように完全導体表面から距離rの位置に置く。このとき，双極子には導体表面に近づく向きに力が働く。ただし，$r \gg 2h$とする。

a) 電界$\boldsymbol{E}$の中に置かれた双極子は$W = -\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}$で与えられるエネルギーを持つ。図 2.3 のように置かれた双極子が持つエネルギーを求めよ。ここで，$\boldsymbol{P}$は双極子モーメントと呼ばれ，$-q$の電荷から$+q$の電荷に向かう位置ベクトルを$\boldsymbol{l}$とすると，$\boldsymbol{P} = q\boldsymbol{l}$で表される。

b) 双極子に働く力の大きさを求めよ。

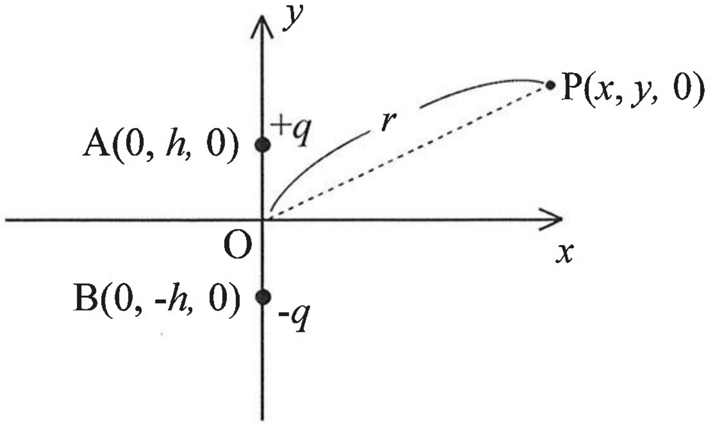

図 2.2

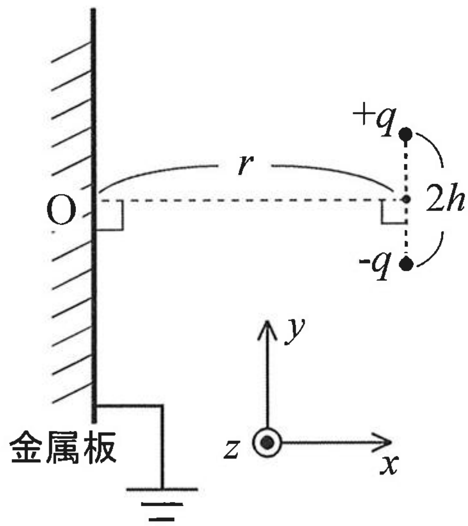

図 2.3

3. 図3.1, 図3.2に示すように，透磁率μ，断面積Sの鉄心に，コイルが繋がっている。1次および2次コイルの巻数はN_1およびN_2である。1 次コイルを流れる交流電流をi_1，2次コイルを流れる交流電流をi_2とする。コイルの抵抗は無視し，i_1，i_2の振幅は常に一定とする。以下の問に答えよ。ただし，導出の過程も記せ。

1) 図3.1に示すように, 鉄心が2つのコイルを貫く場合を考える。鉄心の磁路長をl_1とする。鉄心中の磁束は外部に漏れ出ず，鉄心中のみに生じるとする。

a) 1 次コイルを流れる電流i_1によって，鉄心内部に磁界が発生する。この現象の法則名を答えよ。また，1 次コイルのみに電流が流れるとき（$i_2 = 0$)，鉄心内部に発生する磁束を求めよ。

b) 1 次コイルの自己インダクタンスL_1を求めよ。

c) b)と同様に，2 次コイルのみに電流i_2が流れるとき（$i_1 = 0$)，鉄心内部に発生する磁束ならびに 2 次コイルの自己インダクタンスL_2を求めよ。

d) 1 次コイルと 2 次コイルの相互インダクタンスMを求めよ。

2) 図3.2に示すように，鉄心が途中で上下に距離xだけ分離し空隙がある状況を考える。鉄心の上部と下部の磁路長は同一で，l_2とする。上部の鉄心のみにコイルが巻かれており，コイルには電流i_1が流れている。コイルを貫く磁束は，鉄心内部ならびに断面積Sの空隙のみに生じるとし，空隙における透磁率をμ_0とする。また，鉄心は固定されており動かないとする。

a) 空隙内を貫く磁束密度を求めよ。

b) コイルの自己インダクタンスを求めよ。

c) コイルに蓄えられる磁気エネルギーを求めよ。

d) 上下 2 つの鉄心間に働く力の大きさを求めよ。

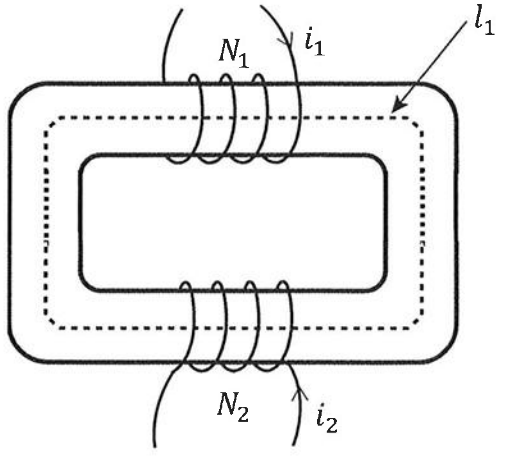

図 3.1

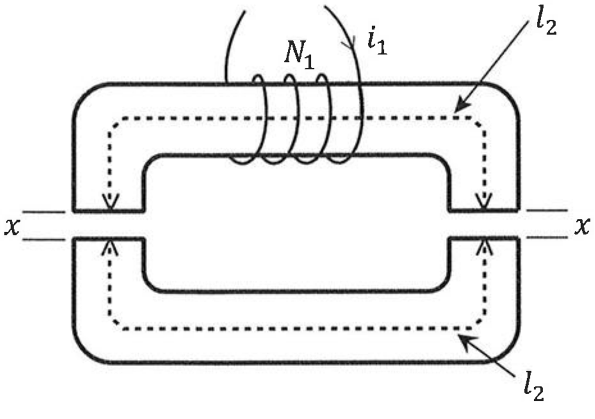

図 3.2

選択専門科目　電気電子系 (午後 2)　31 大修

時間 15:30 ～ 16:30

電気回路

注 意 事 項

1. 大問 1, 2 の解答はそれぞれ別の答案用紙に記入せよ。
2. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号, 試験科目名欄に試験科目名を記入せよ。
3. 電子式卓上計算機などの使用は認めない。

問題分野
電気回路

1. 図 1.1 に直流電圧源 E_1, E_2, E_3, スイッチ S_0, S_1, S_2, S_3, 抵抗 R と $2R$ からなる抵抗網と外部抵抗 R_L で構成される回路を示す。接地を基準電位として点 A の電圧を V_A とする。下記の問に答えよ。ただし，1)-6)では，スイッチ S_0 が開いていて，点 A が外部抵抗 R_L と接続しないとする。

1) スイッチ S_1 が電圧源 E_1 に接続され，スイッチ S_2, S_3 が接地されているとき，V_A を E_1 の関数で表せ。
2) スイッチ S_2 が電圧源 E_2 に接続され，スイッチ S_1, S_3 が接地されているとき，V_A を E_2 の関数で表せ。
3) スイッチ S_3 が電圧源 E_3 に接続され，スイッチ S_1, S_2 が接地されているとき，V_A を E_3 の関数で表せ。
4) スイッチ S_1, S_2, S_3 が電圧源 E_1, E_2, E_3 にそれぞれ接続されているとき，V_A を E_1, E_2, E_3 の関数で表せ。
5) スイッチ S_1, S_2, S_3 がすべて接地されているとき，点 A から右側の回路網の合成抵抗を求めよ。
6) スイッチ S_1, S_2, S_3 が電圧源 E_1, E_2, E_3 にそれぞれ接続されているとき，点 A から右側の回路網は図 1.2 に示す等価電圧源で表現できる。等価電圧源の内部抵抗 R_0 と電圧 E_0 を求めよ。
7) スイッチ S_0 が閉じていて，スイッチ S_1, S_2, S_3 が電圧源 E_1, E_2, E_3 にそれぞれ接続されているとき，V_A を E_1, E_2, E_3, R, R_L の関数で表せ。

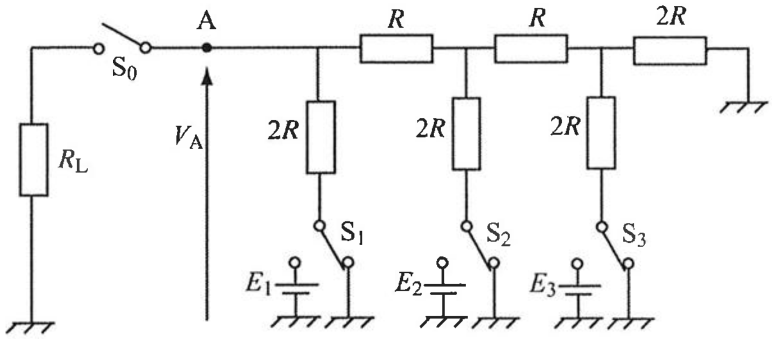

図 1.1

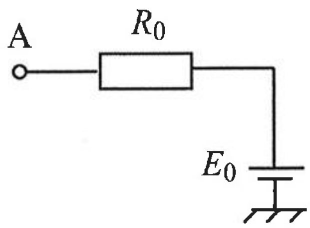

図 1.2

問題分野
電気回路

2. 図 2.1 の回路について以下の問に答えよ。インダクタンスをL，抵抗をRとする。電圧源の電圧をE_0とする。時刻をtとし，接地を基準電位として電圧$v_{\mathrm{E}}(t)$，$v_{\mathrm{R}}(t)$を図 2.1 のように定義する。時刻$t<0$ではスイッチ S は B 側に接続されているとし，$v_{\mathrm{R}}(t)=0$とする。時刻$t=0$でスイッチ S を A 側に接続し, 時刻$t=a$でスイッチ S を B 側に接続する。また，$\mathrm{u}(t)$を単位ステップ関数とする。時間関数$f(t)$のラプラス変換$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$に対して，$F(s)e^{-as}=\mathcal{L}[f(t-a)\mathrm{u}(t-a)]$の関係が成り立つことを用いてよい。ただし，$e$は自然対数の底である。

1) 電圧$v_{\mathrm{E}}(t)$を，単位ステップ関数$\mathrm{u}(t)$を用いて表せ。
2) 電圧$v_{\mathrm{E}}(t)$をラプラス変換した$V_{\mathrm{E}}(s)=\mathcal{L}[v_{\mathrm{E}}(t)]$を求めよ。
3) 電圧$v_{\mathrm{R}}(t)$をラプラス変換した$V_{\mathrm{R}}(s)=\mathcal{L}[v_{\mathrm{R}}(t)]$を求めよ。

以下の問では，$a=L/R$とし，L，Rを用いずに答えよ。

4) 3)の結果を用いて，電圧$v_{\mathrm{R}}(t)$を求めよ。ただし，単位ステップ関数$\mathrm{u}(t)$と$\mathrm{u}(t-a)$を用いよ。
5) 時刻$0\leq t<a$での電圧$v_{\mathrm{R}}(t)$を，単位ステップ関数を用いずに表せ。
6) 時刻$a\leq t$での電圧$v_{\mathrm{R}}(t)$を，単位ステップ関数を用いずに表せ。

以下の問では，スイッチ S を時刻 $t=nT$ で A 側に接続し，時刻 $t=nT+a$ で B 側に接続する操作を周期Tで繰り返す場合について考える。ただし，nは 0 以上の整数とする。また，$T=2a$とする。

7) 時刻nTでの$v_{\mathrm{R}}(t)$の値をv_{sat}とする。十分時間が経った後，v_{sat}の値は一定値に収束する。この時のv_{sat}をE_0，eにより表せ。

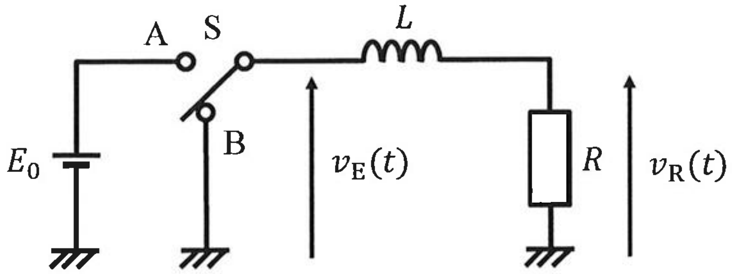

図 2.1

選択専門科目　電気電子系 (午後 2)　31 大修

時間 15:30 ～ 16:30

量子力学/物性基礎

注 意 事 項

1. 大問 1, 2 の解答はそれぞれ別の答案用紙に記入せよ。

2. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号, 試験科目名欄に試験科目名を記入せよ。

3. 電子式卓上計算機などの使用は認めない。

問題分野
量子力学/ 物性基礎

1.

以下に示す幅が L, 障壁高さが無限大の 1 次元の井戸型ポテンシャル $V(x)$の中を自由に運動する質量 m の粒子を考える。

$$V(x)=\begin{cases}0 & (0\le x\le L)\\ \infty & (x<0,\ x>L)\end{cases} \tag{1.1}$$

この粒子が, 以下に示すエネルギーE_1, 波動関数ψ_1 の基底状態にある。$\hbar$はプランク定数を2πで割った定数である。以下の問に答えよ。

$$E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2},\quad \psi_1=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{1.2}$$

1) 基底状態における運動量の期待値$\langle p_1\rangle=\langle\psi_1|\hat{p}|\psi_1\rangle$を求めよ。$\hat{p}$ は運動量の演算子で, $-i\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$で与えられる。

2) 基底状態における運動量の 2 乗の期待値$\langle {p_1}^2\rangle$を求めよ。

3) 運動量 p の不確定性Δpは$\Delta p=\sqrt{\langle(p-\langle p\rangle)^2\rangle}$で与えられる。このとき, Δpは以下のようになることを示せ。

$$\Delta p=\sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2} \tag{1.3}$$

4) 基底状態における運動量の不確定性Δp_1を求めよ。

5) $\dfrac{(\Delta p_1)^2}{2m}$を求めよ。これはどのような状態のエネルギーに相当するか述べよ。

6) 第 1 励起状態と第 2 励起状態の規格化された波動関数ψ_2とψ_3をそれぞれ示せ。

次に, 井戸の中の粒子が以下に示す状態にあったとする。

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\sqrt{\frac{2}{3L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)+\frac{A}{\sqrt{3L}}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \tag{1.4}$$

7) ψをψ_1, ψ_2, およびψ_3を用いて表せ。

8) ψが規格化されるように A の値を求めよ。

9) この状態において基底状態ψ_1に粒子が存在する確率を求めよ。

問題分野
量子力学/ 物性基礎

2.

(A) 図 2.1 のような格子定数 a の面心立方格子を考える。

$\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ をそれぞれ xyz 直交座標系における x, y, z 軸方向の単位ベクトルとして以下の問に答えよ。

1) 最近接の格子点間距離 d を求めよ。

2) 基本並進ベクトルが

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{2}a(\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}),\quad \boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{2}a(\hat{\boldsymbol{z}} + \hat{\boldsymbol{x}}),\quad \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{2}a(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$$

と表されるとき，基本セルの体積 V を求めよ。

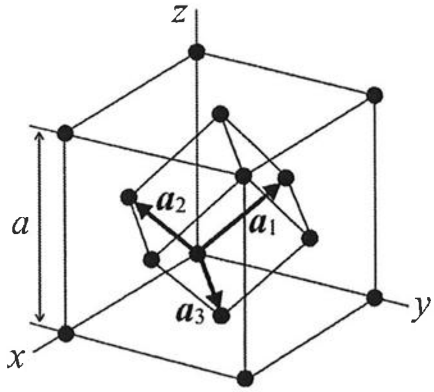

図 2.1

3) 面心立方格子に対する逆格子ベクトル $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ を求めよ。

ただし， $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = \begin{cases} 2\pi & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ とする。

4) 3)で求めた逆格子ベクトルによって指定される逆格子点で構成される格子構造の名称を答えよ。

5) 図 2.2 の立方格子の正方形 S_1 を含む面と正三角形 S_2 を含む面を考える。2) の基本並進ベクトルを用いると，それぞれの面のミラー指数はどのように表されるか。説明とともに答えよ。

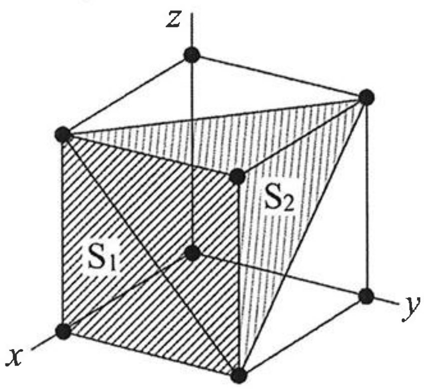

図 2.2

(B) 以下の問に答えよ。

6) 実空間で格子定数 a と $2a$ を持つ 2 次元の長方形格子について，逆格子点の概形を図示せよ。

7) 6) で求めた逆格子点について，第 1 ブリルアン・ゾーンの概形を作図過程がわかるように図示せよ。