

筆答専門試験科目（午前）

30 大修

地球惑星科学系

時間 9:30 ～ 12:00

注意事項

1. 以下の4問（1～4）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各解答用紙に必ず問題番号（1～4）及び受験番号を記入せよ。

[1] 次の問いに答えよ.

1-1. プレート運動に関係して起こる地学現象に関する以下の問いに答えよ.

- 1-1-1. 中央海嶺で生成される海洋底玄武岩の化学組成は場所によらずほぼ一定である. その理由を 3 行以内で述べよ.
- 1-1-2. 海洋底に磁気異常の縞模様ができる原因を 3 行程度で説明せよ. また, 磁気異常の縞模様からプレート運動について何がわかるか. 例を 2 つ挙げ, 理由とともに答えよ.
- 1-1-3. 太平洋中央海嶺の地震活動度は大西洋中央海嶺と比べ低く, 規模の大きな地震はあまり発生しない. その理由を 3 行程度で述べよ.
- 1-1-4. 海嶺同士をつなぐトランスフォーム断層を模式的に図示し, プレート運動を示す矢印を書き入れよ. また, トランスフォーム断層で発生する地震の場所を×印で示せ. 図には海嶺, トランスフォーム断層の位置を明示すること.
- 1-1-5. 世界の沈み込み帯の多くの火山は, 沈み込むプレートの深さが 60–170 km 程度となる領域に分布している. 火山下のプレートの深さが幅を持つ理由を 3 行程度で述べよ.
- 1-1-6. 浅い地震の場合, 震央から離れるにしたがって小さくなる震度分布が観測されることが多い. しかし, 沈み込むプレート内で大きな地震が発生した場合, 震度の異常域 (異常震域) が観測されることがある. 異常震域が観測される理由を 3 行程度で述べよ.

1-2. 次の文章を読み、以下の問いに答えよ。

南米のアンデスでは標高が約 3000 m より低いところでは逆断層地震、それより高いところでは正断層地震が多く発生することが知られている。これは標高が低いところでは最大水平圧縮応力 (σ_{xx}) と鉛直応力 (σ_{zz}) の差 (差応力: $\sigma_{xx}-\sigma_{zz}$) が正、標高が高いところでは差応力が負であることを示唆している。このように標高により差応力が変化する原因を考えてみる。

図 1(a)のように、地殻 (一様な密度 ρ_c) がマントル (一様な密度 ρ_m) の上にアイソスタシーで浮かんでいるとし、地殻内の力のつり合いを考える (図 1b)。鉛直下方に z 軸、水平方向に x 軸をとる。簡単のために標高およびモホ面の深さは x 軸方向のみにゆるやかに変化し、その変化を直線で近似する。位置 A (座標 x) での地殻の厚さを h 、点 A から微小距離 dx だけ離れた点 B (座標 $x+dx$) での標高を 0、地殻の厚さを $h+dh$ ($dh \ll h$) とする。点 A と点 B の標高差を $d\eta$ 、モホ面の深さの差を $d\xi$ 、モホ面の傾斜角を θ とする。点 A 下に働く x 軸方向の水平力を F_x 、地殻の自重による鉛直方向の力を F_z とし、水平方向の力と鉛直方向の力の差 (F_x-F_z) を差力とする。構造は二次元であり奥行き方向の幅を 1 とする。また、地表より浅部の密度を 0、重力定数を g とする。以下の問いに答えよ。なお、数値計算では、 $\rho_c=2.8 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 、 $\rho_m=3.4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ 、 $g=9.8 \text{ m s}^{-2}$ を用いること。

1-2-1. 点 A を基準として、点 B において地表からモホ面までの質量異常 (Δm) を考える。

アイソスタシーが成り立つ条件 ($\Delta m=0$) から $d\xi$ を dh を用いてあらわせ。また、標高が 1 km 高くなると、地殻は何 km 厚くなるか。有効数字 2 桁で求めよ。

1-2-2. マントル側からモホ面に垂直に働く圧力 P により、 x 軸方向に力 dF_x が発生する。モホ面における鉛直方向の力のつり合いから、 P を求めよ。また、 dF_x を h と dh を含む式であらわせ。

1-2-3. 地殻の厚さが dh だけ増加したことによる水平方向の力の変化 (dF_x) と鉛直方向の力の変化 (dF_z) を用いて、差力の変化分 (dF_x-dF_z) を考える。十分に離れた 2 点間で地殻の厚さが H_0 から H_1 まで変化した場合、差力はどれだけ変化するか求めよ。また、 $H_0=30 \text{ km}$ 、 $H_1=70 \text{ km}$ のときの差力の変化を有効数字 2 桁で求めよ。

1-2-4. 差力を地殻の厚さで割ると地殻内の平均差応力を求めることができる。アンデスの地殻の厚さは低地で約 30 km、高地で約 70 km である。設問 1-2-3 の結果を参考に、アンデスにおいて高地で正断層地震が卓越する理由を 5 行以内で述べよ。

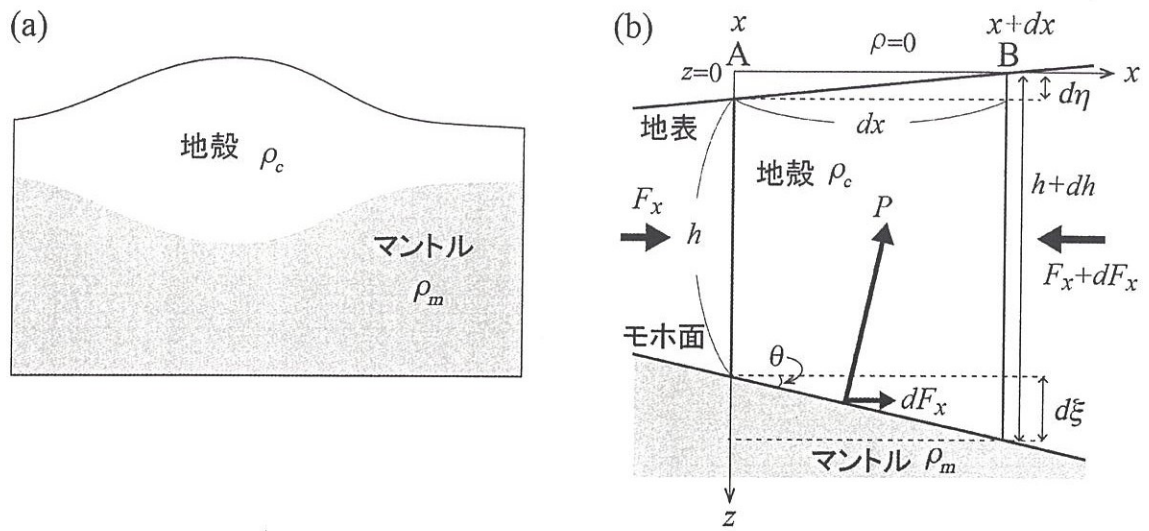


図 1. (a) アイソスタシーの概念図. (b) 地殻内の力のつり合い.

[2] 次の文章を読んで以下の問いに答えよ。

地球はどのような化学組成を持っているのだろうか。固体地球は〔ア〕・〔イ〕・〔ウ〕という化学組成の異なる層構造を持つため、地表付近の岩石のみから地球全体の平均化学組成を求めることは不可能である。太陽系形成の標準モデルによれば、〔エ〕の中で塵が合体して大きさ数 km～数十 km の〔オ〕となり、〔オ〕が衝突合体して大きさ数百 km～数千 km の〔カ〕へと成長し、最終的に〔キ〕が生まれたとされている。小惑星帯から地球に飛来する隕石のうち、溶融を経験していない〔ク〕はそのような〔オ〕の組成を反映している。中でも〔ケ〕は一部元素を除き^(A)太陽光球の元素存在度に極めて近い化学組成を持つため、地球の原材料物質として様々なモデル計算などに用いられてきた。

地球の原材料物質と考えられる〔ケ〕を溶融・固化すると、〔コ〕・〔サ〕・〔シ〕という3つの固相、および固相に入らない揮発性成分が生じる。このことから、地球化学の父と呼ばれる V. M. Goldschmidt は、周期表の元素を「親石元素」・「親銅元素」・「親鉄元素」・「親気元素」に分類した（図1）。親石元素は〔ア〕や〔ウ〕の大部分を占める〔コ〕および酸化物との親和性が高い元素である。親鉄元素は地球形成時に〔イ〕に配分された元素群であり、^(B)金属結合により化合物を作りやすい。親銅元素は〔ス〕として〔ウ〕の特定地域に存在する。親気元素は単原子のまま安定な〔セ〕に加え、大気の主成分である〔ソ〕、固体に入りにくい水素などである。

2-1. 空欄〔ア〕～〔ソ〕を埋める最も適切な語句を以下の語群から一つ選択し、答えよ。なお、一つの語句を異なる空欄に重複して用いることはできない。

語群

希ガス	分化隕石	地球型惑星	マントル	分子雲	鉱床	未分化隕石	HED 隕石	硫化物
地殻	金属	窒素	原始惑星	ハロゲン	CI-コンドライト	二酸化炭素	微惑星	ケイ酸塩
原始惑星系円盤	石鉄隕石	コア	超新星					

2-2. 下線部 A にある太陽光球の元素組成を求める方法とその原理を3行以内で述べよ。

2-3. 下線部 B にあるように、親鉄元素は金属結合により化合物を作りやすい。では、親石元素と親銅元素は地球上でそれぞれ主にどのような化学結合により化合物を形成しているか。元素の電気陰性度に着目し、5行以内で述べよ。

2-4. 図1をみると、17族元素は親石元素に分類されている。17族元素が親石元素である理由を簡潔に述べよ。

2-5. Goldschmidt の元素分類法には曖昧さもあり，ある種の元素は複数のグループに対して親和性を示す．複数グループに属する元素のひとつとして Fe があげられるが，なぜ Fe にはそのような曖昧さが生じるのか，その理由を 3 行以内で述べよ．

2-6. 固体地球における元素分布を考えるには，固相・液相間における元素分配を定式化することが重要である．地球内部において固相と液相が平衡条件下で共存する例として，マントルの部分融解を考えよう．部分融解が生じる直前の固相における，ある元素の初期質量濃度 (w/w) を C_S^0 とする．部分融解により生じた液相は固相と平衡共存し，元素は 2 つの相に分配される．このとき，この元素の固相および液相における質量濃度 (w/w) をそれぞれ C_S ， C_L とすると，固相－液相間分配係数 k は次の式で定義される．

$$k = C_S / C_L \quad (\text{式 1})$$

これをふまえ，以下の問いに答えよ．

2-6-1. 発生した液相と固相の重量分率をそれぞれ f ， $1-f$ とする．このとき，液相における元素濃度 C_L の固相初期濃度 C_S^0 に対する比 (C_L / C_S^0) を f と k の関数で表せ．また， $k < 1$ のとき，(C_L / C_S^0) ≥ 1 となることを示せ．

2-6-2. 表 1 はあるマントル物質とメルト間における分配係数を元素別に示したものである．このマントル物質の部分融解に伴い，液相の Er/Lu 比がどのように変化するか， f の関数として解答用紙のグラフに図示せよ (グラフの縦軸は対数スケール)．導出の過程も記述すること．なお，部分融解前の固相における Er/Lu 比を 1 とする．また，分配係数 k は元素ごとに異なる値を持ち，その値は部分融解過程を通じて一定であるとする．

2-6-3. 設問 2-6-2 では，元素の分配係数がマントル物質の部分融解程度に依存せず，常に一定であるとした．しかし，天然においては，部分融解が進むにつれマントル物質とメルト間における分配係数は変化すると考えられる．その理由を，5 行以内で述べよ．

2-6-4. 分配係数 k が 1 より十分小さい元素は，固相より液相に多く分配されることから，液相濃集元素と呼ばれる．表 1 にあるように，親石元素である Sr および Zr は共に液相濃集元素であるが，両元素がマントル物質に分配されにくく，メルトに濃集しやすい理由には違いがある．造岩鉱物中における両元素の価数とイオン半径に着目し，その違いを 3 行以内で述べよ．

2-6-5. 大陸地殻は一般的に液相濃集元素に富む．その理由を 5 行以内で述べよ．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
H																	He
3Li	4Be											5B	6C	7N	8O	9F	10Ne
11Na	12Mg											13Al	14Si	15P	16S	17Cl	18Ar
19K	20Ca	21Sc	22Ti	23V	24Cr	25Mn	26Fe	27Co	28Ni	29Cu	30Zn	31Ga	32Ge	33As	34Se	35Br	36Kr
37Rb	38Sr	39Y	40Zr	41Nb	42Mo	43Tc	44Ru	45Rh	46Pd	47Ag	48Cd	49In	50Sn	51Sb	52Te	53I	54Xe
55Cs	56Ba	57-71La*	72Hf	73Ta	74W	75Re	76Os	77Ir	78Pt	79Au	80Hg	81Tl	82Pb	83Bi	84Po	85At	86Rn
87Fr	88Ra	89-103Ac**	104Rf	105Db	106Sg	107Bh	108Hs	109Mt	110Ds	111Rg	112Cn	113Nh	114Fl	115Mc	116Lv	117Ts	118Og
57La	58Ce	59Pr	60Nd	61Pm	62Sm	63Eu	64Gd	65Tb	66Dy	67Ho	68Er	69Tm	70Yb	71Lu			
**89Ac	90Th	91Pa	92U	93Np	94Pu	95Am	96Cm	97Bk	98Cf	99Es	100Fm	101Md	102No	103Lr			
	親石元素				親鉄元素				親銅元素				親気元素				

図1 Goldschmidtによる元素分類法。本図の区分は Goldschmidt 自身が行った分類と一部異なる。

表1 代表的マントル物質とメルト間の分配係数

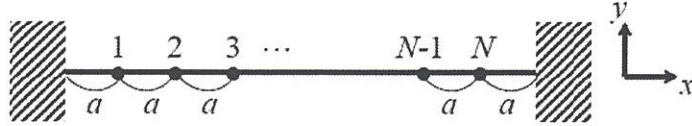
Rb	La	Sr	Zr	Er	Lu
0.0003	0.004	0.005	0.02	0.1	0.5

[3]

3-1. 下図のような N 個の質点と弦からなる系を考える。質点には、図のように 1 から順に N までの番号をつける。質点の質量は全て m 、質点間の間隔は全て a 、質点に働く弦からの張力は一定で全て T とする。弦の質量は無視できるとする。また、質点には弦からの張力のみ働き、重力等は無視できるとする。質点が y 軸方向にのみ変位する場合を考え、各質点の平衡点からの微小変位を y_i ($i = 1, 2, \dots, N$) とすると、質点の運動（振動）は以下の方程式で記述できる。

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = -T\frac{y_1 - y_2}{a} - T\frac{y_1}{a} \\ m\ddot{y}_2 = -T\frac{y_2 - y_3}{a} - T\frac{y_2 - y_1}{a} \\ \dots \\ m\ddot{y}_i = -T\frac{y_i - y_{i+1}}{a} - T\frac{y_i - y_{i-1}}{a} \\ \dots \\ m\ddot{y}_N = -T\frac{y_N}{a} - T\frac{y_N - y_{N-1}}{a} \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\ddot{y}_i$ は y_i の 2 階の時間微分を表し、 $\ddot{y}_i \equiv d^2 y_i / dt^2$ である。また弦の両端は、 $y = 0$ に固定されているものとする。



3-1-1. $N = 2$ の場合、式 (1) の連立方程式を解いて $y_1(t)$, $y_2(t)$ を求めよ。ここで初期条件として、 $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $\dot{y}_1(0) = -\dot{y}_2(0) = -\sqrt{3T/ma}$ を満たすとする。

3-1-2. 任意の N に対して、以下の手順により、式 (1) の振動解の振動数 ω_l ($l = 1, 2, \dots, N$) を求める。微分演算子 $\Delta = d/dt$ とおくと、式 (1) は以下のように表される。

$$m\Delta^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = -\frac{T}{a} M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

λ を行列 M の固有値、 I を単位行列とし、以下の行列式を D_N とする。

$$D_N = \det(M - \lambda I) \quad (3)$$

このとき、固有方程式 $D_N = 0$ の解 λ_l ($l = 1, 2, \dots, N$) を用いて、振動数は

$$\omega_l = \sqrt{\frac{T\lambda_l}{ma}} \quad (l = 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

と表される。次の手順により λ_l を求める。

3-1-2-1. 対角成分が $a_{i,i} = \alpha$, また $a_{i\pm 1,i} = -\beta$, それ以外の成分は $a_{i,j} = 0$ であるような $n \times n$ 行列の行列式 A_n は, 以下の式を満たすことを示せ。

$$A_n - \alpha A_{n-1} + \beta^2 A_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3) \quad (5)$$

3-1-2-2. $\alpha/(2\beta) = \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi/2$) とおけるとき, $A_n = \gamma \beta^n \sin\{(n+1)\theta\}$ (γ は定数, $n \geq 1$) が式 (5) の解であることを示せ。さらに行列式 A_1 を求め, γ を θ を用いて表せ。

3-1-2-3. 問3-1-2-2.の結果を用いて, 式(3)で定義される行列式 D_N に対する固有方程式 $D_N = 0$ の解 λ_l ($l = 1, 2, \dots, N$) を求めよ。

3-2. 複素 z 平面上の点 $z = a$ と, この点を囲む任意の閉曲線 C を考える。このとき, C で囲まれた領域の中で正則な関数 $f(z)$ に対して, 以下の積分公式が成り立つ。

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \eta f(a) \quad (6)$$

ここで C 上での積分の向きは, 複素平面上で反時計回りにとる。右辺の係数 η は, f, C, a のいずれにも依存しない複素定数である。 C として具体的に, 点 $z = a$ を中心とし無限小の半径を持つ円をとり, 式 (6) の左辺の積分を実行することによって, η を求めよ。

3-3. 次の積分を考える。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} \quad (7)$$

3-3-1. $z = e^{i\theta}$ とおき, 式 (7) を z に関する複素積分

$$I = \oint_{C'} g(z) dz \quad (8)$$

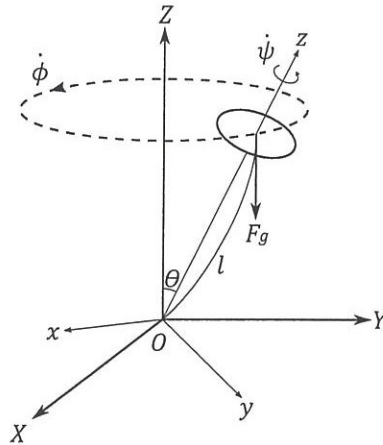
に書き換える。ここで, C' は複素平面上での積分路である。被積分関数 $g(z)$ を, z のみを変数とする形で書き表せ。

3-3-2. $g(z)$ は $z = a_1$ および $z = a_2$ (ただし $|a_1| < |a_2|$) に極を持つ。 a_1, a_2 を求めよ。また, 2つの極の位置と積分路 C' の概形を, 複素平面上に図示せよ。

3-3-3. 式 (8) の複素積分を実行し, I を求めよ。

[4]

- 4-1. コマの運動について考える。今、下図のように、コマが z 軸のまわりを回転するように固定した (x, y, z) 座標系をとり、静止座標系を (X, Y, Z) とする。コマとともに動く (x, y, z) 座標系の y 軸は、 Z 軸と z 軸で張られた平面内にとる。原点 O は、座標系 (x, y, z) と (X, Y, Z) で共通とする。また座標系 (x, y, z) と (X, Y, Z) は、それぞれ直交座標系とする。



コマには、 Z 軸のマイナス方向に一定の重力 $F_g = (0, 0, -F_g)$ が加わっているとする。このときコマは、 z 軸のまわりを回転 (自転) しつつ、さらにその自転軸 (z 軸) が Z 軸のまわりを回転する (歳差運動)。コマは原点 O を固定点として z 軸のまわりを角速度 $\dot{\psi}$ で自転しており、コマの自転軸 (z 軸) が Z 軸の周りを角速度 $\dot{\phi}$ で回転しているとする。 z 軸と Z 軸の間の角度を θ とすると、一般には θ も変化する。この θ の変化に対応する運動を章動とよぶ。

- 4-1-1. コマの角速度ベクトル ω を、

$$\omega = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z$$

と表す。コマの自転、歳差運動、章動の回転軸の向きを考え、 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ を $\dot{\psi}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \theta$ を用いて表せ。ここで、 $e_z = -\sin\theta e_y + \cos\theta e_z$ を用いてよい。今、 e_x は x 方向の単位ベクトルで、 e_y, e_z, e_z も同様に定義された単位ベクトルである。

- 4-1-2. コマは z 軸まわりに対称な円盤であり、円盤の中心と原点 O が長さ l だけ離れているとする。このとき、 x 軸、 y 軸、 z 軸まわりのコマの慣性モーメントをそれぞれ I_x, I_y, I_z とすると、 $I_x = I_y$ である。コマの運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーを考えることにより、ラグランジアン $\mathcal{L}$ が以下になることを示せ。

$$\mathcal{L} = \frac{I_x}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_z}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - F_g l \cos \theta \quad (1)$$

- 4-1-3. このとき ψ, ϕ に対応する一般化された運動量 (正準運動量) は、それぞれ保存量となる。 ψ, ϕ に対するオイラー・ラグランジュの方程式より、それぞれの正準運動量 L_ψ, L_ϕ を求めよ。

- 4-1-4. θ に対するオイラー・ラグランジュの方程式より、運動方程式を導け。

- 4-1-5. $\theta \equiv \theta_0 = \text{一定}$, $|\dot{\psi}| \gg |\dot{\phi}|$ と仮定して、問 4-1-4. で求めた運動方程式より歳差運動の角速度を求めよ。

4-1-6. 実際には $\theta \neq 0$ のときは, θ は $\theta = \theta_0$ のまわりで振動する (章動)。以下の手順により, 章動の角振動数を求めよ。

4-1-6-1. コマの運動エネルギーを K , ポテンシャル・エネルギーを U とすると, コマの全エネルギー $E = K + U$ は, 以下のような θ のみの関数として表される。

$$E = \frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) \quad (2)$$

問 4-1-3. で求めた 2 つの保存量 L_ψ, L_ϕ を用いて $V_{\text{eff}}(\theta)$ を表せ。

4-1-6-2. コマの自転が十分に速い ($|\dot{\psi}| \gg |\dot{\phi}|$) とする。コマが $\theta = \theta_0$ のまわりを微小振動するとき, 式 (2) より, $\theta = \theta_0$ からのずれ θ_1 ($|\theta_1| \ll \theta_0$) に対して以下の関係式が近似的に成り立つ。

$$E' \approx \frac{1}{2} I_x \dot{\theta}_1^2 + \frac{L_\psi^2}{2I_x} \theta_1^2 \quad (3)$$

ここで, E' はエネルギーに相当する物理量 (定数) である。このとき, コマの章動は $\theta = \theta_0$ まわりの調和振動となる。式 (3) より, 章動の角振動数を求めよ。

4-2. N ($\gg 1$) 個の独立な粒子からなる系において, 各々の粒子が $-\varepsilon_0, \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$) の二つのエネルギー状態のみとり得るとする。この系について, 以下の問いに答えよ。

4-2-1. ミクロカノニカル分布に基づいて考えてみよう。全エネルギーが $E = M\varepsilon_0$ ($M = -N, \dots, N$) の場合の状態の数 W_M を, N, M を用いて表せ。

4-2-2. 系のエントロピー $S = k \log_e W_M$ を N, M を用いて表せ (k はボルツマン定数)。なお, Stirling の公式 $\log_e N! \simeq N \log_e N - N$ ($N \gg 1$) を用いよ。

4-2-3. 温度 T について, $1/T = \partial S / \partial E$ と定義する。 $-\varepsilon_0$ のエネルギーをとる粒子の数を N_- , ε_0 のエネルギーをとる粒子の数を N_+ とするとき, $N_-/N, N_+/N$ を T を用いて表せ。また, 系のエネルギー E を T を用いて表せ。ただし, $E < 0$ の範囲について考えることとする。

4-2-4. 次に, この系をカノニカル分布に基づいて考えてみよう。系の温度を T としたとき, 系の内部エネルギーを温度 T を用いて表せ。必要に応じて, 以下の関係式を用いてもよい。

$$\text{Helmholtz 自由エネルギー} \quad F = -kT \log_e Z \quad (Z \text{ は分配関数}) \quad (4)$$

$$\text{エントロピー} \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (5)$$

$$\text{内部エネルギー} \quad U = F + TS \quad (6)$$

4-2-5. この系の定積比熱を求めよ。また, 定積比熱の温度に対する依存性を論じよ。必要に応じて図を用いてもよい。

筆答専門試験科目（午後）

30 大修

地球惑星科学系

時間 13:30 ～ 16:00

注意事項

1. 以下の4問（5～8）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各解答用紙に必ず問題番号（5～8）及び受験番号を記入せよ。

[5] 次の設問に答えよ.

5-1. 地殻岩石の主要鉱物 5 つの名称と化学式を答えよ.

5-2. 火成岩や変成岩を観察すると、そこに含まれる主要構成鉱物の数は 4~6 種類程度であることが殆どである. 岩石の化学組成は多様であるのに、その構成鉱物の数が限られる理由はなぜか? 岩石中の有効成分数とギブスの相律に基づき 4 行以内で答えよ.

5-3. 高圧多形体の意味を答えよ.

5-4. マントルを構成する主要鉱物には理想的な結晶構造としては無水であっても、最大で 3 質量%程度の水を鉱物中に保持するものも存在する. 含水によって鉱物の物性にはどのような変化が生じると予想出来るか. 理由とともに 3 行以内で答えよ.

5-5. 地震波トモグラフィーによると、沈み込む海洋プレートは地表から深さ 660 km 付近に滞留しているように見える. このようなスラブの滞留が起こるメカニズムを鉱物学的な観点から 5 行以内で説明せよ. 図を用いてもよい.

5-6. 地球の下部マントルにおいて、アルミニウムとカルシウムはどの鉱物の結晶内部にどう配置しているのか、化学式とともに答えよ. 図を用いてもよい.

5-7. 地球のマントル底部には核とマントルの大きな温度差ゆえに熱境界層が存在している. マントル底部の熱伝導率が $10 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 、熱境界層最深部の温度勾配が 4 K km^{-1} であるとき、核からマントルへ運ばれる総熱流量 (単位は W) を計算せよ. ただし、マントル底部の熱伝導率、温度勾配は地域的に均一と仮定し、核半径は 3500 km とする.

5-8. 地球の外核は溶融した純鉄に少量のニッケルや水素、炭素、酸素、ケイ素、硫黄などの不純物が含まれていると考えられている. このような不純物の存在は溶融鉄の密度や弾性波速度、電気伝導度にどのような影響を与えと考えられるか? そう考えた理由とともに 5 行以内で答えよ.

5-9. 地球の核を純鉄と鉄—軽元素合金の 2 成分共融系であると仮定する. 地震波観測から推定される内核と外核の密度は、地球核の温度圧力条件における純鉄のそれよりもそれぞれ 5%、10% 程度小さい. このことを調和的に説明する相平衡図と核の化学組成範囲を図示せよ.

5-10. 地殻、上部マントル、マントル遷移層、下部マントル、D' 層、外核、内核で構成される地球の各層境界の深さは、地球内部の温度構造が現在よりも 300 K 低い場合にどのように変化するか 10 行以内で答えよ.

[6] 次の設問に答えよ.

6-1. 次の文章を読んで、設問に答えよ.

化学反応(1) $\text{CH}_4(\text{g}) + 2\text{O}_2(\text{g}) \rightarrow \text{CO}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ について考える.
気相における各分子のフガシティー f と液相における分子の活動度 a の量比について,

$Q = \frac{f_{\text{CO}_2} \cdot a_{\text{H}_2\text{O}}^2}{f_{\text{CH}_4} \cdot f_{\text{O}_2}^2}$ とすると、この反応の自由エネルギー変化(ΔG_r)は

$$\Delta G_r = \Delta G^0 + \quad (\text{A})$$

と書き表すことができる. ここで ΔG^0 は、標準状態 (25°C, 1 atm) における、この反応の自由エネルギー変化を表しており、標準自由エネルギー変化と呼ばれる. T は絶対温度[K], R は気体定数(8.31 J mol⁻¹ K⁻¹)とする. この反応が化学平衡にあるときは、(B) であるから、この反応の平衡定数 K とし、 $\ln X = 2.30 \log X$ の関係を用いると、標準状態において

$$\log K = -\Delta G^0 / \quad (\text{C})$$

である. 一方、 ΔG^0 は反応に関わるそれぞれの化合物の標準生成自由エネルギー(ΔG_f^0)から算出することができる. 標準生成自由エネルギーとは、ある化合物 1 mol を、標準状態において (D) から生成する際のエネルギー変化である. ここで、 $\text{CH}_4(\text{g})$ 、 $\text{CO}_2(\text{g})$ および $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ の ΔG_f^0 はそれぞれ -50.7 kJ mol⁻¹、(E) kJ mol⁻¹ および -237.1 kJ mol⁻¹ である. これら ΔG_f^0 の値は

$$\Delta G_f^0 = \Delta H_f^0 - T\Delta S^0$$

の関係から算出することができる. ここで、 ΔH_f^0 (標準生成エンタルピー) および ΔS^0 (標準エントロピー変化) は、それぞれ、ある化合物 1 mol を標準状態において (D) から生成する際の生成熱およびエントロピー変化である. ここで、 $\text{CH}_4(\text{g})$ 、 $\text{CO}_2(\text{g})$ および $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ の ΔH_f^0 はそれぞれ、-74.8 kJ mol⁻¹、-393.5 kJ mol⁻¹ および -285.8 kJ mol⁻¹ である. 一方、標準エントロピー変化は、それぞれの化合物の標準エントロピー(S^0)から算出できる. 例えば、 $\text{CO}_2(\text{g})$ 、 $\text{O}_2(\text{g})$ および $\text{C}(\text{黒鉛})$ の標準エントロピー(S^0)はそれぞれ、213.6 J K⁻¹ mol⁻¹、205.0 J K⁻¹ mol⁻¹ および -5.7 J K⁻¹ mol⁻¹ である. これらの情報から、化学反応(1)についての ΔG^0 は (F) kJ mol⁻¹、また $\log K$ は (G) である. したがって、室温の大気中で化学反応(1)は自発的に進むことが予想される.

以上の例のような熱力学データは、それぞれの化合物の計測によって得られるが、水溶液中のイオンについては、それを単独で取り出して実測することが困難である. そこで、希薄水溶液中の水素イオン $\text{H}^+(\text{aq})$ の標準状態における ΔG_f^0 、 ΔH_f^0 および S^0 はいずれもゼロであると約束する. これを水素イオン規約とよぶ.

6-1-1. 空欄(A)および(B)にあてはまる数式を答えよ.

6-1-2. 空欄(C)にあてはまる数字を答えよ.

6-1-3. 空欄(D)にあてはまる語句を答えよ.

6-1-4. 空欄(E)、(F)および(G)にあてはまる数字をそれぞれ答えよ.

6-2. 設問 6-1 を参考にして、次の問に答えよ。

6-2-1. 右の表の空欄(H)および(I)にあてはまる数字を答えよ。

6-2-2. 水溶液中の $\text{H}_2\text{S}_{(\text{aq})}$ と $\text{SO}_4^{2-}_{(\text{aq})}$ が化学平衡にあるとする。酸素分圧 $\log f_{\text{O}_2} = -66$ のとき、標準状態において $\text{H}_2\text{S}_{(\text{aq})}$ と $\text{SO}_4^{2-}_{(\text{aq})}$ の活動度が等しくなる pH を有効数字 2 桁で答えよ。

	ΔG_f^0 (kJ mol ⁻¹)	ΔH_f^0 (kJ mol ⁻¹)	S^0 (J K ⁻¹ mol ⁻¹)
H_2 (g)	0	0	130.6
O_2 (g)	0	0	205.0
S (s)	0	0	31.8
$\text{H}_2\text{S}_{(\text{aq})}$ (H)		-39.8	121.3
$\text{SO}_4^{2-}_{(\text{aq})}$ (I)		-909.2	20.1

6-3. 下表は SiO_2 の多形である石英とコーサイトについての熱力学データである。次の問に答えよ。必要ならば前問までのデータを用いてよい。

鉱物相	ΔH_f^0 (kJ mol ⁻¹)	S^0 (J K ⁻¹ mol ⁻¹)	V (cc mol ⁻¹)
コーサイト	-907.6	40.38	20.64
石英	-910.7	41.34	22.69

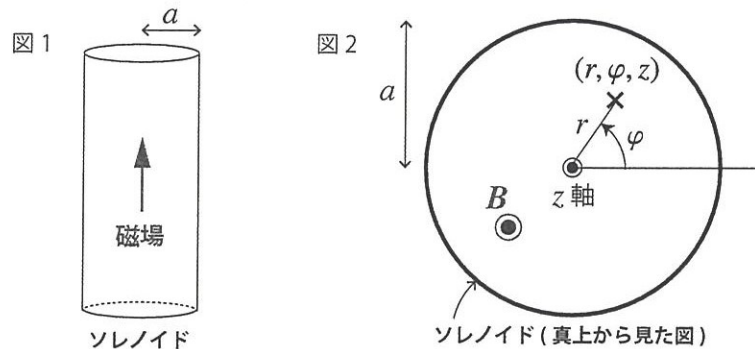
6-3-1. 標準状態 (25°C, 1 atm) において、石英はコーサイトよりも安定であることを示せ。ただし、Si 単体結晶の標準エントロピーは 18.83 J K⁻¹ mol⁻¹ であることを用いて、自由エネルギー変化を示すこと。

6-3-2. コーサイトが石英より安定になるのは 1 atm よりも高圧か、それとも低圧かを答えよ。ただし、自由エネルギーの圧力変化を計算し、理由を示すこと。

6-3-3. コーサイトが石英より安定になるのは 25°C よりも高温か、それとも低温かを答えよ。ただし、自由エネルギーの温度変化を計算し、理由を示すこと。

[7]

7-1. 導線を円筒面に沿って一様かつ密に巻いたコイルを「ソレノイド」と呼ぶ。半径が a で軸方向に無限に長いソレノイドを考える。このソレノイドに電流を流すと、図1のように、ソレノイドの軸に平行な一様磁場がソレノイドの内部に発生する。電流が時間に比例して増大する場合、時刻 t におけるソレノイド内部の磁束密度の大きさは、時刻の原点を適当にとりて bt (b は正の定数) と書くことができる。ここで、電流の増加は緩やかであり、電流の変化に伴う電磁波の放射は無視できるとする。計算の便宜上、図2のようにソレノイドの中心軸を z 軸とする円柱座標系 (r, φ, z) をとり、 z 軸の向きはソレノイド内部の磁束密度ベクトル B の方向にとることとする。ソレノイドの内部と外部はどちらも真空であるとする。以下の問いに答えよ。



7-1-1. ソレノイド内部の磁場は、時間変化するので電場を誘導する。対称性より、誘導電場の電気力線は z 軸に垂直で、かつ z 軸を中心とする同心円を構成する。ソレノイドの内側における電場ベクトルを E としたとき、 E の向きは図2上で時計回りと反時計回りのどちらであるか答えよ。また、 z 軸から距離 r の位置における $|E|$ を a, b, t, r のうち必要なものを用いた式で書き表せ。

7-1-2. 無限に薄い剛体の円板を、ソレノイドの軸に垂直に、かつ z 軸が円板の中心を通るように置く。円板の半径 s は a より小さく、したがって円板はソレノイドの内側に収まるとする。円板は一様に帯電しているとし、円板の単位面積あたりの電荷を σ とする。円板は絶縁体であり、電荷は円板上に固定されているとする。また、円板の存在がソレノイド内部の磁場や電場に及ぼす影響は無視できるとする。ソレノイドの内側の誘導電場は、この帯電円板に z 軸まわりの力のモーメント N を与える。 N を a, b, s, σ, t のうち必要なものを用いた式で書き表せ。ただし、 N の正負は、力のモーメントが円板を図2上で反時計回りの方向に回転させようとするときに $N > 0$ となるようにとる。

7-1-3. 前問の円板は一様な質量分布を持つとし、円板の単位面積あたりの質量を μ とする。この円板の z 軸まわりの慣性モーメント I を、 μ, s を用いた式で書き表せ。

7-1-4. 時刻 $t (> 0)$ における円板の z 軸まわりの回転角速度を ω とする。問7-1-2. で求めた力のモーメントのもとでの円板の運動方程式を解き、 ω を a, b, s, μ, σ, t のうち必要なものを用いた式で書き表せ。ただし、円板は時刻 $t = 0$ において静止していたとする。また、 ω の正負は、円板が図2上で反時計回りの方向に回転するときに $\omega > 0$ となるようにとる。

7-2. 質量 m の量子力学的粒子が、次のような時間に依存しない 1 次元ポテンシャル $V(x)$ のもとにある。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < L \\ V_0 & |x| > L \end{cases}$$

ただし、 $V_0 > 0, L > 0$ である。時間を含まない Schrödinger 方程式は次のように書ける。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (1)$$

ここで、 ψ は波動関数、 E は粒子のエネルギー、 $\hbar = h/2\pi$ であり、 h はプランク定数である。

ここでは $E < V_0$ の場合を考える。

7-2-1. 波動関数 $\psi(x)$ が $x = \pm\infty$ で満たすべき条件を示せ。

7-2-2. ある関数 $\psi(x)$ が式 (1) の解であるとき、 x の符号を入れ替えた $\psi(-x)$ もまた、式 (1) の解であることを示せ。

7-2-3. この問題で考えている状態は縮退していない、すなわち、1つのエネルギー固有値 E に対応する波動関数は 1 つしかないことが知られている。この場合、波動関数には偶関数のものと奇関数のものがあることを説明せよ。

7-2-4. α と β を次のようにおく。

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}, \quad \beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$$

波動関数 $\psi(x)$ が偶関数の場合、 $x = \pm\infty, \pm L$ での波動関数の満たすべき条件から、 αL と βL の関係を求めよ。

また、得られた関係を、 αL を横軸、 βL を縦軸とする 2 次元平面上に図示せよ。ただし、 αL の図示範囲は $0 \leq \alpha L \leq 2\pi$ を含むものとせよ。また、 αL と βL の値が取り得る範囲に注意して図示すること。

7-2-5. ポテンシャルの高さが次の条件を満たす場合、波動関数が偶関数となる固有状態は 1 つだけ存在することを説明せよ。

$$0 < V_0 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

[8]

8-1. 3次元空間内にデカルト座標系 (x, y, z) をとり, 回転楕円面 $F(x, y, z) = 0$ を考える。ただし,

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 \quad (1)$$

であり, a と c は実定数で, $0 < c < a$ とする。

回転楕円面上の点の位置は一般に, 2つのパラメータを使って表すことができる。ここでは, 回転楕円面上の点 (位置ベクトルが $\mathbf{r}$ で, 3次元デカルト座標の値が $\mathbf{r} = (x, y, z)$) と次の関係があるような2つのパラメータ (θ, φ) を用いる。

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \sin \theta \cos \varphi \\ a \sin \theta \sin \varphi \\ c \cos \theta \end{pmatrix}$$

以下では, $0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ の場合を考える。

8-1-1. パラメータの値が (θ, φ) に対応する回転楕円面上の点 P における次のベクトル t_θ および t_φ を求めよ。

$$t_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}, \quad t_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$$

8-1-2. 回転楕円面上の点 P において, 回転楕円面に垂直な方向 (法線方向) で長さが1のベクトルを $\mathbf{n}$ とする。ベクトル $\mathbf{n}$ を求めよ。

8-1-3. ベクトル $\mathbf{n}$ に垂直なベクトルを $\mathbf{n}_\psi$ とし, 点 P を含みベクトル $\mathbf{n}_\psi$ を法線ベクトルとする平面を Σ_ψ とする。ベクトル $\mathbf{n}_\psi$ とベクトル t_φ のなす角を ψ とする。

平面 Σ_ψ と回転楕円面の交線は曲線となり, 点 P におけるこの曲線の曲率 k は ψ の関数 $k(\psi)$ である。

角 ψ が $0 \leq \psi < 2\pi$ の範囲で変化すると $k(\psi)$ は変化し, 最大値 $k_{\max}$ と最小値 $k_{\min}$ の間の値をとる。このとき, $K = k_{\max} k_{\min}$ はガウス曲率と呼ばれる。

ガウス曲率は, 次の式で計算できる。

$$K = \frac{H_1 H_3 - H_2^2}{J_1 J_3 - J_2^2}$$

ただし, 各記号の意味は次の通り。

$$J_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}, \quad J_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}, \quad J_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi},$$

$$H_1 = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta^2} \cdot \mathbf{n}, \quad H_2 = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \theta \partial \varphi} \cdot \mathbf{n}, \quad H_3 = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \varphi^2} \cdot \mathbf{n}$$

回転楕円面上の位置を表すパラメータが $(\theta, \varphi) = (\pi/2, \pi/2)$ に対応する点を点 A とする。

点 A におけるガウス曲率 K を求めよ。

8-1-4. 式 (1) の F を用い, 原点をのぞいて定義される次のベクトル $\mathbf{M}$ を求めよ。

$$\mathbf{M} = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}$$

8-1-5. 問 8-1-3. で定義した点 A における次の量 μ を求めよ。

$$\mu = \frac{1}{2} \operatorname{div} M$$

8-1-6. 量 μ は平均曲率と呼ばれ, $\mu = \frac{1}{2}(k_{\max} + k_{\min})$ の関係がある。

点 A における $k_{\max}$ と $k_{\min}$ を, 論拠を明確にして, 求めよ。

8-2. 次の関数 $g(t, x)$ を t のべき級数で表したときの, n 次の項の係数として定義される多項式 $P_n(x)$ について考える。

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (-1 \leq x \leq 1, |t| < 1) \quad (2)$$

以下の問いに答えよ。ただし, $P'_n(x)$, $P''_n(x)$ は, それぞれ $P_n(x)$ の x についての 1 階微分, 2 階微分を表す。

8-2-1. $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ を x の関数として具体的に書き表せ。

8-2-2. 式 (2) を t に関して微分することによって, 次の式が成り立つことを示せ。

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0 \quad (3)$$

8-2-3. 次の漸化式が成り立つことを示せ。

$$(2n + 1)xP_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

8-2-4. 式 (2) を x に関して微分することによって, 次の式が成り立つことを示せ。

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n - t \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0 \quad (5)$$

8-2-5. 多項式 $P_n(x)$ について成り立つ以下の各微分方程式の, 空欄 $\boxed{(\text{ア})}$ $\sim$ $\boxed{(\text{カ})}$ を埋めよ。式 (6) と式 (10) は証明せずにそのまま用いてよい。

$$P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = 2xP'_n(x) + P_n(x) \quad (6)$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = \boxed{(\text{ア})} P_n(x) \quad (7)$$

$$P'_{n+1}(x) = \boxed{(\text{イ})} P'_n(x) + \boxed{(\text{ウ})} P_n(x) \quad (8)$$

$$P'_{n-1}(x) = \boxed{(\text{イ})} P'_n(x) - \boxed{(\text{エ})} P_n(x) \quad (9)$$

$$(1 - x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x) \quad (10)$$

$$(1 - x^2)P''_n(x) - \boxed{(\text{オ})} P'_n(x) + \boxed{(\text{カ})} P_n(x) = 0 \quad (11)$$