

筆答専門試験科目（午前）

3 1 大修

地球惑星科学系

時間 9 : 3 0 ~ 1 2 : 0 0

注 意 事 項

1. 以下の4問（1～4）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の答案用紙に記入せよ。1問につき答案用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各答案用紙に必ず問題番号（1～4）及び受験番号を記入せよ。

[1]

- 1-1. 大気中にある“飛行船”について考える（図 1 参照）。飛行船は円筒状のシリンダーとピストンで構成され、シリンダー内にはヘリウムガスが封入されており、ガスの出入りはない。シリンダーは熱をよく通し、内部のヘリウムガスと外の大気の温度は常に等しい。大気もヘリウムガスも、理想気体とみなす。

シリンダーとピストンおよびヘリウムガスの総質量は M である。また、ピストンの断面積は A で、直径は D である。シリンダーとピストンの体積は無視できて、飛行船の体積 V はヘリウムガスの体積で $V = Ax$ と近似できる。ただし x は、シリンダーの底から測ったピストンの位置である。なお、ピストンには機械機構がついていて、任意に動かしたり固定したりすることができる。また、シリンダーやピストンは十分頑丈で、圧力で変形することはない。

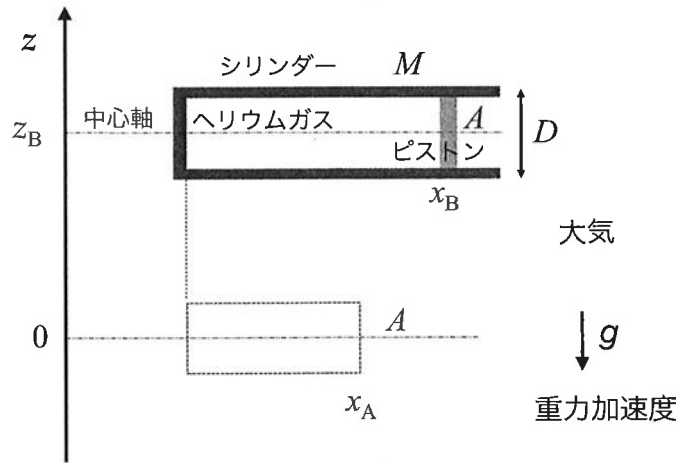


図 1

鉛直方向を z 軸にとる。大気温度 T は z によらず一定と近似する。大気圧は $P(z) = P_0 \exp(-z/h)$, $h = k_B T / mg$ で与えられる。ただし、 h は大気のスケールハイト、 k_B はボルツマン定数、 m は大気の気体分子 1 個の平均質量、 g は重力加速度である。

ピストンに作用する圧力は z が異なると変わるが、シリンダーの直径 D が h よりも十分に小さいため、ピストンに作用する平均圧力はピストンの中心軸上の圧力に等しくなる。同様に、飛行船が占める体積にあった大気平均密度は飛行船の中心軸上の大気密度に等しい。

飛行船の z 方向の位置を、水平な円筒状飛行船の中心軸の位置で表す。飛行船の高度が $z = 0$ でピストンの位置が x_0 にあるとき、シリンダー内のヘリウムガスの圧力が P_0 に等しくなる。

- 1-1-1. 飛行船を高度 $z = z_B (> 0)$ に置き、ピストンを $x_B (> x_0)$ に固定すると、飛行船の平均密度が $z = z_B$ における大気密度と等しくなり、飛行船に作用する浮力と重力がつり合って静止した。このときのピストンの位置 x_B を、 $M, k_B, T, m, A, P_0, z_B, h, g$ の中から必要なものを用いて表せ。

ピストンが x_B の位置にあるこの状態を、「状態 B」と呼ぶことにする。

- 1-1-2. ピストンを x_B からゆつくりと移動させ、飛行船の体積を減少させた。飛行船の平均密度の上昇に伴い、飛行船はゆつくりと下降した。ピストンの位置が $x_A (> x_0)$ になったとき、

飛行船は $z = 0$ に達したとする。このときのピストンの位置 x_A を、 $M, k_B, T, m, A, P_0, z_B, h, g$ の中から必要なものを用いて表せ。

ピストンが x_A の位置にあるこの状態を、「状態 A」と呼ぶことにする。

1-1-3. 状態 B から状態 A に状態がゆっくりと変化する間に、ヘリウムガスがピストンからされた仕事 $\Delta W_{BA}^{\text{He}}$ を、 $M, k_B, T, m, A, P_0, x_0, x_A, x_B$ の中から必要なものを用いて表せ。

1-1-4. 状態 B から状態 A に状態がゆっくりと変化する間の、ヘリウムガスのエントロピーの変化量 $\Delta S_{BA}^{\text{He}}$ を、 $M, k_B, T, m, A, P_0, x_0, x_A, x_B$ の中から必要なものを用いて表せ。

1-1-5. 状態 B から状態 A に状態がゆっくりと変化する間に、ピストンが大気にした仕事 $\Delta W_{BA}^{\text{air}}$ を、 $M, k_B, T, m, A, P_0, x_0, x_A, x_B$ の中から必要なものを用いて表せ。

1-1-6. 高度 $z = 0$ に体積 Ax_A の円筒状領域を設け、そこにある圧力 P_0 、温度 T の状態の大気塊を考える（図 1 参照のこと）。

1-1-6-1. この大気塊の質量 M_c を、 $M, k_B, T, m, A, P_0, x_0, x_A, x_B$ の中から必要なものを用いて表せ。

1-1-6-2. 飛行船とこの大気塊を合わせた系を一つの系と見なし、状態 B から状態 A への状態変化に伴う、この系の位置エネルギー、内部エネルギー、エントロピーの変化について述べよ。ただし、飛行船が状態 B から状態 A へ変化することに伴い、状態 A の飛行船と同じ体積・位置の大気塊が状態 B の飛行船と同じ体積・位置の大気塊へと移動し、周りの大気の状態は全く変化しなかったと見なせるものとする。

1-2. 空間領域 V の電荷分布と電流分布が時間的に変化すると、空間内の電磁場が変化し、その変化がまわりの空間に波として光速で伝わっていく（電磁波の放射）。このとき、電場 E 、磁束密度 B に対して次式を満たす関数 ϕ 、 A を電磁ポテンシャルと呼び、これによって電磁場を表現することができる（ c は光速）。

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1)$$

$$B = \nabla \times A \quad (2)$$

$$\text{ただし } \nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

以下では、3次元直交座標系 (x, y, z) を用いる。

1-2-1. 上式を用いて、真空中の Maxwell 方程式が電磁ポテンシャルに対して以下の式 (4), (5) のようになることを示せ。ここで、 J は電流密度、 ρ は電荷密度、 μ_0 と ϵ_0 はそれぞれ真空の透磁率と誘電率であり、 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ である。また、 ∇^2 はラプラシアンである。

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J(x, t) \quad (4)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho(x, t)}{\epsilon_0} \quad (5)$$

1-2-2. 式 (4), (5) の解は、

$$\phi(x, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', t - |x - x'|/c)}{|x - x'|} dV' \quad (6)$$

$$A(x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(x', t - |x - x'|/c)}{|x - x'|} dV' \quad (7)$$

と書ける。これは、時刻 t における位置ベクトル x での電磁場が、それより前の時刻 $t' = t - |x - x'|/c$ における位置ベクトル x' での電荷分布、電流分布によってつくられていることを示している（遅延効果）。以下の問いに答えよ。式 (6), (7) は既知として用いてよい。

1-2-2-1. z 軸上に置かれた無限に長い導線を正の向きに流れる電流を考える。導線には時刻 $t \geq 0$ において一定の電流 I が流れていて、 $t < 0$ では電流が流れていないとする。時刻 $t > r/c$ において、 z 軸からの距離 r にある x 軸上の点 $x_0 = (r, 0, 0)$ でのベクトルポテンシャル A をつくるのは z 軸上の限られた範囲の電流要素であることに注意し、時刻 $t > r/c$ における点 x_0 での A の各成分 (A_x, A_y, A_z) を求めよ。さらに、点 x_0 における電場 E 、磁束密度 B の各成分 (E_x, E_y, E_z), (B_x, B_y, B_z) もそれぞれ求めよ。必要に応じて以下の積分は既知として用いてよい（ $\ln$ は自然対数を表す）。

$$\int_{-z}^z \frac{1}{\sqrt{r^2 + z'^2}} dz' = \ln \frac{\sqrt{r^2 + z^2} + z}{\sqrt{r^2 + z^2} - z} \quad (8)$$

1-2-2-2. 問 1-2-2-1. において、 $t = \infty$ で定常状態になったときの点 x_0 における E と B の各成分をそれぞれ求めよ。

[2]

2-1. x を実数, y, z を x を独立変数とする 2 階微分可能な実数値関数とする。次の (i) ~ (iii) の微分方程式をそれぞれ解け。ただし, (i) は $y = f(x)$ の形で, (ii) は $y = f(x, a_1, a_2)$ の形で, (iii) は $y = f(x, b_1, b_2, b_3, b_4)$, $z = g(x, b_1, b_2, b_3, b_4)$ の形で答えよ ($a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4$ は任意の定数)。', '' はそれぞれ x についての 1 階微分, 2 階微分, $\ln$ は自然対数を表す。

(i) $y' = x + e^{-y} - xe^{-y} - 1, y(0) = \ln 2$

(ii) $y'' - 6y' + 8y = 8x + 2$

(iii) $\begin{cases} y'' + 2y + z = 0 \\ z'' + 2y + 3z = 5 \sin 3x \end{cases}$

2-2. 非負の整数 n に対し, n 次のベッセル関数 $J_n(x)$ は次の級数で表される。

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \quad (1)$$

次の各問いに答えよ。

2-2-1. $x = 0$ における $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_l(x)$ の 1 階微分係数

$$\frac{dJ_0(0)}{dx}, \quad \frac{dJ_1(0)}{dx}, \quad \frac{dJ_l(0)}{dx}$$

をそれぞれ求めよ。ここで l は 2 以上の整数とする。

2-2-2.

2-2-2-1. 非負の整数 n に対して $x^{n+1}J_{n+1}(x)$ と $x^{-n}J_n(x)$ の微分

$$\frac{d}{dx} \{x^{n+1}J_{n+1}(x)\} \quad \text{および} \quad \frac{d}{dx} \{x^{-n}J_n(x)\}$$

を考えたとき, x のべきが最低次の項をそれぞれ求めよ。

2-2-2-2. 非負の整数 n に対して次の関係式 (2) と (3) が成り立つことを示せ。

$$\frac{d}{dx} \{x^{n+1}J_{n+1}(x)\} = x^{n+1}J_n(x) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \{x^{-n}J_n(x)\} = -x^{-n}J_{n+1}(x) \quad (3)$$

2-2-3. 次の不定積分が成り立つことを示せ。ただし, c は積分定数である。

$$\int x^3 J_0(x) dx = 2x^2 J_0(x) + x(x^2 - 4)J_1(x) + c$$

2-2-4. 次の定積分の値 I を, λ , $J_1(\lambda)$ などを用いて表せ。ただし λ は正の実数で, $J_0(\lambda) = 0$ を満たす定数である。

$$I = \int_0^1 x(1-x^2)J_0(\lambda x) dx$$

[3] 地球のテクトニクス及び火山活動に関する以下の説明文と図1を参照し、問いに答えよ。

①海洋底の水深は海洋プレートの形成年代と相関する。若いプレートでは半無限媒質冷却モデルに従い、経過時間の平方根に比例して海洋底は徐々に深くなっており、実際に観測された水深 d (m) と海洋底の年代 t (Ma) の関係は、以下の式 (1) で近似できる。

$$d = 2500 + 350\sqrt{t} \quad \text{式 (1)}$$

②小笠原諸島、父島の西方約 130 km に位置する地点 2 は、近年の活発な噴火活動により陸地面積が広がったことで話題となった。伊豆—小笠原島弧の三宅島、八丈島、青ヶ島、鳥島などでは (a) 組成の溶岩が噴出するのに対し、地点 2 では大陸地殻の平均化学組成と類似する (b) 質マグマが火山島を形成しており、マグマ生成に関与した起源物質の化学組成に何らかの違いがある可能性がある。

③伊豆—小笠原—マリアナ弧の火山フロントと海溝軸の間には、ウェッジマントルの (c) が水と反応することで生じた (d) が海山列を成している。地点 3 では (d) に包有された岩片として、沈み込み境界付近の低い地温勾配を特徴付ける (e) 相に属する変玄武岩が採取されており、低密度化・軟化した (d) が深部より上昇する際に捕獲したものと考えられる。

④ミクロネシア連邦、カロリン諸島に位置する地点 4 は、(f) から成る堡礁（ほしょう）が無数の火山島群を取り囲んでいる地形が特徴的である。主要な火山島群であるトル島（最高峰：海拔 439 m）及びウエノ島は、(g) から粗面岩（トラカイト）に至る一連のマグマ系列に属する溶岩から形成されており、年代測定の結果から約 10 Ma に火山活動は最盛期を迎え、その後衰退したことが示されている。

⑤地点 5 は 5 つの盾状火山から成る地球上最大級の火山島で、最高峰は海拔 4205 m に達する（マウナケア火山）。現在でも活発に噴火が続くキラウエア火山は島の南東沿岸部に位置している。島を構成する溶岩は化学組成を元に (a) と (g) に大別され、それぞれの形成条件や時代推移を基におよそ 150 万年に及ぶ火山体の一生がモデル化されている。

3-1. 説明文の空欄 (a) ～ (g) にそれぞれ当てはまる最も適切な岩石名を語群から一つ選べ（重複不可）。

語群： かんらん岩 コマチアイト ソレアイト質玄武岩 アルカリ玄武岩 花崗岩
安山岩 青色片岩 角閃岩 グラニュライト キンバーライト 蛇紋岩 石灰岩
大理石 砂岩 縞状鉄鉱層 チャート

3-2. 地点 1（水深およそ 6 km）における海面からマントル最上部までの層構造を図示せよ。その際、層序を構成する岩石名とおおよその厚さについても示せ。

3-3. 地点 1 の海洋地殻はプレート発散境界（中央海嶺）で生じたマグマが固結したものである。中央海嶺では何が原因でどのようにマグマが生じているのか、マントルの融解条件を踏まえて 5 行以内で説明せよ。

- 3-4. 地点 2 を含むプレート収束境界で生じた火山は島弧火山と呼ばれている。島弧におけるマグマ生成メカニズム及び、島弧で見られる海溝軸にほぼ平行な火山の帯状配列の原因について、マンツルの融解条件を踏まえて 5 行以内で説明せよ。
- 3-5. 島弧でのマグマ形成には、海洋プレートの一部として沈み込んだ堆積物が関与していることが知られている。このことを調べる手法の一つとして、溶岩に含まれる ^{10}Be (ベリリウム-10, 半減期 136 万年) の含有量測定がある。なぜ溶岩中の ^{10}Be 含有量を調べることで堆積物の関与が分かるのか、その原理を 5 行以内で説明せよ。
- 3-6. 説明文③に関し、岩石 (c) が、岩石 (d) に変化する加水作用では、岩石 (c) に最も多く含まれる鉱物 A 中の Fe^{2+} が磁鉄鉱 (マグネタイト) を生成する際に水が還元され、水素が発生すると考えられている。その他の生成物が $\text{Mg}_3\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4$ と $\text{Mg}(\text{OH})_2$ に限定された場合の化学反応式を示せ。ただし鉱物 A の $\text{Fe}:\text{Mg}$ は 1:9 (モル比) とする。
- 3-7. 地点 4 と地点 5 の火山島を作ったマグマの総量を比較したい。最高峰を頂点とする円錐形の火山体平坦で水平な海洋底に乗っていると仮定した場合、両地点における火山体の体積をそれぞれ求めよ (単位は km^3)。ただし、地点 4 及び地点 5 の水深は海洋底の年代 160 Ma, 90 Ma として式 (1) より求め、火山体底部の半径はそれぞれ 60 km, 100 km とする。また、 $\sqrt{10} = 3.16$, $\pi = 3.14$ として計算すること。
- 3-8. 地点 4 と地点 5 において、実際に火山島を形成したマグマの総量は、設問 3-7 で行った見積もりに比べ多いことが期待される。設問 3-7 の計算が過少見積もりとなる主たる要因を 5 行以内で説明せよ。ただし山体の形状、削剥量、水深の見積もりに伴う誤差は考慮しない。
- 3-9. 地点 4 に産する粗面岩 (トラカイト) は岩石 (g) の組成を持つマグマが結晶分化したことにより生じたと考えられる。表 1 に示した鉱物 X, Y, Z の名称をそれぞれ答えよ。また、表 1 に示した鉱物量比と化学組成から、結晶分化前のマグマの SiO_2 濃度 (重量%) を小数点以下 2 桁で求めよ。

表 1

	鉱物 X	鉱物 Y	鉱物 Z	粗面岩 (= 残液)
重量比 (%)	36	23	20	21
濃度 (重量%)				
SiO_2	39.20	52.50	46.60	62.90
TiO_2	0.02	0.11	3.23	0.98
Al_2O_3	0.00	29.23	6.44	19.90
FeO	19.37	0.89	7.96	3.11
MnO	0.30	0.00	0.15	0.07
MgO	41.00	0.12	13.16	1.86
CaO	0.36	12.80	21.76	0.81
Na_2O	0.00	3.89	0.10	6.74
K_2O	0.00	0.35	0.02	3.53
Total	100.25	99.89	99.42	99.90

3-10. 地点 4 及び地点 5 の火山島はどちらもホットスポット火成活動に由来するが、マグマ生成条件が大きく異なるため噴出マグマの化学組成や量に違いが生じたと考えられる。どちらも海洋プレートの底でマグマが発生したとする場合、マンツルのソリダス温度の深さ変化と上昇マンツルの温度経路を図示しつつ、違いが生じる理由を 5 行以内で説明せよ。

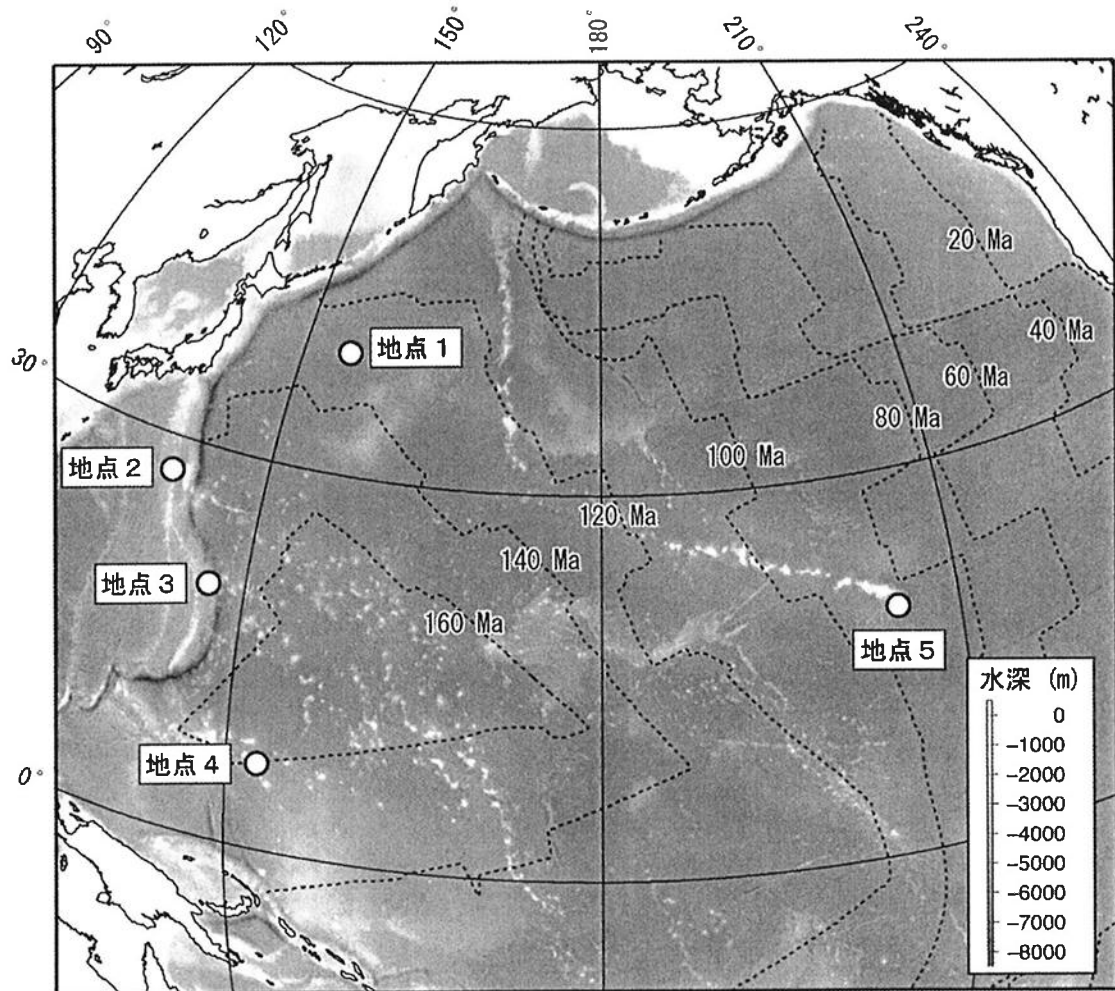


図 1：北太平洋とその周辺域における海底地形図 (ETOPO 1 データに基づく)。点線は海洋地殻の等年代線を示す (Müller et al., 2008 のデータを使用して作成)。

[4]

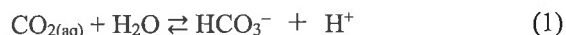
4-1. 気相と液相の間の化学平衡について次の問に答えよ。

4-1-1. 気相の化学種 CH_4 , CO_2 , N_2 および N_2O の水に対するヘンリー定数は, 25°C においてそれぞれ $1.4 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{atm}^{-1}$, $3.5 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{atm}^{-1}$, $6.0 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{atm}^{-1}$ および $2.5 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{atm}^{-1}$ である。これら 4 つのうち, 最も水に溶けにくい分子を答えよ。

4-1-2. 室温 25°C で, 密閉された 100 mL のガラス容器に 30 mL の水が入っている。この容器の気相部分は 1.0 atm の N_2 で満たされており, 気相と液相の間で化学平衡が成り立っているとする。このとき, 水溶液 30 mL 中に溶存する N_2 量は何 μmol であるか答えよ。

4-1-3. 設問 4-1-2 の容器に, 標準状態(25°C , 1 atm)で 10 mL の気体 N_2O を注入したとする。しばらくして化学平衡に達したとき, 水溶液中に溶存する N_2O 量は何 μmol になっているか答えよ。ただし, 気体定数 R は $0.082 \text{ L} \cdot \text{atm} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ とし, 導出の過程も記すこと。

4-1-4. 設問 4-1-2 の容器に, 標準状態(25°C , 1 atm)で 10 mL の気体 CO_2 を注入したとする。気相の $\text{CO}_{2(g)}$ は水溶液中に溶解し, $\text{CO}_{2(aq)}$, HCO_3^- および CO_3^{2-} の 3 種類の溶存化学種が生じる。これら 3 種の間の化学平衡は次の反応(1)と(2)で記述される。



反応(1)および(2)の 25°C における平衡定数 K_1 と K_2 は, それぞれ $4.4 \times 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1}$ および $4.7 \times 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1}$ であるとする。しばらくしてこの系が化学平衡に達し, 水溶液の pH が 6 になったとすると, 気相中に残る $\text{CO}_{2(g)}$ の分圧は何 atm になっているか答えよ。ただし, 導出の過程も記すこと。

4-2. 地球の大気と海洋の間での物質移動について, 次の問に答えよ。ただし, 計算に必要な場合は, 設問 4-1 で用いた各定数を用いること。

4-2-1. ある時刻において, 地球大気中の CO_2 の体積混合率は 300 ppmv であったとする。このとき大気中に存在する CO_2 の総量はおよそ何 mol であるか答えよ。ただし, 固体地球の半径は 6400 km , 重力加速度は $9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 地表面大気圧は 10^5 Pa ($= 1 \text{ atm}$), 大気の実効分子量は 29 であるとする。

4-2-2. 設問 4-2-1 の全大気 CO_2 と, 全海洋に溶存する炭酸化学種 $\text{CO}_{2(aq)}$, HCO_3^- および CO_3^{2-} が化学平衡にあると仮定する。海洋の pH が 8 であったとすると, このとき海洋の HCO_3^- 濃度は何 $\text{mol} \cdot \text{kg}^{-1}$ であるか答えよ。

- 4-2-3. 設問 4-2-2 のとき，全溶存炭酸化学種の海洋中での総量は設問 4-2-1 で求めた大気 CO_2 総量の何倍であるか，モル比で答えよ．ただし，地球海水の総量は $1.4 \times 10^{21} \text{ kg}$ であるとする．
- 4-2-4. 設問 4-2-3 の化学平衡にある海洋から，ある時刻において，何らかの要因により，大量の炭酸塩 CaCO_3 が沈殿したとする．この変化に応答して，大気の CO_2 分圧はどのように変化すると考えられるか説明せよ．ただし，化学反応式を用いて 6 行程度で答えること．
- 4-2-5. 海水中に溶存する酸素(O_2)の鉛直濃度分布をみると，一般的には，海洋の表層で酸素濃度が高く，海面下 1000 m 付近に向かって，酸素濃度は急激に減少していく．このような鉛直濃度分布ができる理由を次の 3 つの語句を全て用いて，6 行程度で説明せよ．
【語句： 光合成，呼吸，生物ポンプ】

筆答専門試験科目（午後）

31 大修

地球惑星科学系

時間 13:30～16:00

注 意 事 項

1. 以下の4問（5～8）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の答案用紙に記入せよ。1問につき答案用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各答案用紙に必ず問題番号（5～8）及び受験番号を記入せよ。

[5]

5-1. 次の問いに答えよ。

5-1-1. 周期 2π の区分的になめらかな関数 $f(x)$ を以下のようにフーリエ級数展開する。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

5-1-1-1. 以下の関数 $f(x)$, $g(x)$ のフーリエ係数 a_n , b_n をそれぞれ求めよ。

(i) $f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$

(ii) $g(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq \pi) \\ -1 & (-\pi \leq x < 0) \end{cases}$

5-1-1-2. 関数 $f(x)$ と a_n , b_n の間には、一般的に以下の関係式が成り立つ。

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2)$$

式 (2) と問 5-1-1-1. の結果を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

の値を求めよ。

5-1-2. $f(t)$, $g(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F(\omega)$, $G(\omega)$ とし、以下のように定義する。

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

5-1-2-1. $g(t)$, $G(\omega)$ の複素共役を $g^*(t)$, $G^*(\omega)$ とすると、以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt \quad (4)$$

必要であれば、以下のデルタ関数を用いてよい。

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega$$

5-1-2-2. 以下の関数 $f(t)$ のフーリエ変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (|t| < 1) \\ 0 & (|t| \geq 1) \end{cases}$$

5-1-2-3. 式 (4) と問 5-1-2-2. の結果を用いて以下の積分値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$$

5-2. 実数 t に依存する 3 次元実ベクトル $V(t)$ が、以下の微分方程式を満たすとする。

$$\frac{dV}{dt} = q(E + V \times n) - \frac{V}{\tau} \quad (1)$$

ここで、 q および τ は正の定数、 E はゼロでない 3 次元実定数ベクトル、 n は 3 次元単位実定数ベクトルである。以下では、 V, E の n に平行な成分を、ベクトル表示でそれぞれ $V_{\parallel}, E_{\parallel}$ と表す。同様に、 V, E の n に垂直な成分を、ベクトル表示でそれぞれ $V_{\perp}, E_{\perp}$ と表す。

5-2-1. A を任意の 3 次元ベクトルとしたとき、 A の n に平行な成分は

$$A_{\parallel} = (A \cdot n)n$$

と表すことができる。これに対し、 A の n に垂直な成分 $A_{\perp}$ が

$$A_{\perp} = -n \times (n \times A)$$

のように表せることを示せ。

5-2-2. 式 (1) および $V_{\parallel}(0) = 0$ (ただし 0 はゼロベクトル) を満たす $V_{\parallel}(t)$ を求めよ。答えは $q, \tau, E_{\parallel}, E_{\perp}, n, t$ のうち必要なものを用いて書き表すこと。

5-2-3. 式 (1) および $dV_{\perp}/dt = 0$ を満たす $V_{\perp}$ を求めよ。答えは $q, \tau, E_{\perp}, E_{\perp} \times n$ のうち必要なものを用いて書き表すこと。

5-2-4. n に垂直な平面上の正規直交基底 e_1, e_2 を、 $e_1 \times e_2 = n$ が満たされるようにとる。 e_1, e_2 はいずれも t に依存しないとする。この基底を用いて、 $V_{\perp}$ を $V_{\perp} = \alpha(t)e_1 + \beta(t)e_2$ のように展開する。ここで、 $\alpha(t)$ および $\beta(t)$ は t の実数値関数である。 $E_{\perp} = 0$ の場合に、式 (1) および $V_{\perp}(0) = \alpha_0 e_1$ (ただし α_0 は定数) を満たす $\alpha(t), \beta(t)$ を求めよ。

[6]

- 6-1. 1次元空間中の量子力学的粒子のある時刻における波動関数 $\varphi(x)$ が、以下のように与えられているとする。

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{a}} \exp\left(\frac{ibx}{\hbar} - \frac{x^2}{2a^2}\right)$$

ここで、 x は位置座標、 b は実数定数、 a は正の定数、 i は虚数単位である。また、 $\hbar = h/(2\pi)$ で、 h はプランク定数である。以下の間では、積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \sqrt{\pi}$$

を断りなく使用して良い。

- 6-1-1. 以下では、粒子の任意の物理量 F に対して、その期待値を $\langle F \rangle$ と表す。 $\langle x \rangle$ および $\langle x^2 \rangle$ を求めよ。

- 6-1-2. 粒子の x 方向の運動に関する運動量を p と表す。 $\langle p \rangle$ および $\langle p^2 \rangle$ を求めよ。

- 6-1-3. 粒子の位置および運動量の標準偏差は、それぞれ $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$ および $\Delta p = \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle}$ のように表せる。問 6-1-1., 問 6-1-2. の結果を用いて、 Δx および Δp が同時にゼロにならないことを示せ。

6-2. 固体の熱振動についてデバイ・モデルを用いて考える。以下では、一辺の長さが L の立方体の結晶中の N 個の原子の振動を考える。

6-2-1. 立方体内の固有振動の数は、以下のように求めることができる。以下の (ア) ~

(オ) を埋めよ。

立方体の軸の方向をそれぞれ x, y, z とし、ある方向 i ($i = x, y, z$) の固有振動の波長を λ_i とする。立方体に周期境界条件を適用するとき、 λ_i は L と整数 n_i を用いて $\lambda_i =$ (ア) と表される。以下では L は λ_i に比べて十分に大きいものとし、固有振動の数を連続的に扱う。

まず、固有振動の波数ベクトルを $\mathbf{k}$ とし、 $\mathbf{k}$ が区間 $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ にある固有振動の数を考える。式 (ア) より、ある一方向の波数空間において 1 個の固有振動が含まれる区間 Δk_i は、 L を用いて $\Delta k_i =$ (イ) と表すことができる。よって、 $\mathbf{k}$ 空間において単位体積当たり (ウ) 個の固有振動が含まれる。すなわち、区間 d^3k に含まれる固有振動の数 dn は、 $dn =$ (ウ) d^3k となる。このとき、波数 (波数ベクトルの大きさ) が k から $k + dk$ までの範囲にある固有振動の数 dn は、固体の体積 $V \equiv L^3$ と k を用いて $dn =$ (エ) dk となる。

固体は等方的な弾性体であると仮定すると、この固体の振動には縦波と横波が含まれ、横波は独立な 2 つの偏波をもつ。縦波と横波の速さをそれぞれ c_l, c_t とすると、 c_l, c_t と角振動数 ω 、波数 k の間には、それぞれ $\omega = c_l k, \omega = c_t k$ の関係が成り立つ。 c_l, c_t は定数として扱うものとする。今、縦波と横波の平均の速さ c_s を $3/c_s^3 \equiv 1/c_l^3 + 2/c_t^3$ のように定義する。このとき式 (エ) を変形すると、角振動数が ω から $\omega + d\omega$ までの範囲にある固有振動の数 dn は、 V, c_s, ω を用いて $dn = D(\omega)d\omega =$ (オ) $d\omega$ と表される。

6-2-2. このモデルでは、角振動数は $0 \leq \omega \leq \omega_D$ の範囲に分布するものとする。このとき、問 6-2-1. の結果と、固有振動の総数が $3N$ に等しくなるという条件を用いると、

$$D(\omega) = 9N \frac{\omega^2}{\omega_D^3} \quad (1)$$

と表されることを示せ。

6-2-3. この固体の固有振動は調和振動子のようにふるまい、固有振動の数は振動子の量子状態の数と考えることができる。この固体の振動のエネルギーは、各角振動数での振動子のエネルギーの平均値を考え、それを全ての振動子に対して足し合わせたものとして表すことができる。今、考えている振動子はボーズ・アインシュタイン統計に従う。よって、温度 T において、角振動数 ω の振動子のエネルギーの平均値は、以下のように表される。

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (2)$$

ここで $\hbar = h/2\pi$ 、 h はプランク定数、 k_B はボルツマン定数である。

このとき、式 (1)、(2) を用いてこの固体の振動のエネルギーおよび定積比熱 C_V を求めよ。必要であれば、以下のデバイ関数 $De(y)$ やその微分形 $De'(y)$ を用いてよい。

$$De(y) = \frac{3}{y^3} \int_0^y \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (3)$$

また，その低温と高温の極限において，定積比熱は $C_V \propto T^n$ (n は整数) のように表される。 n の値を示せ。必要であれば，以下のデバイ関数の極限值を用いてよい。

$$De(y) \approx \begin{cases} \frac{\pi^4}{5y^3} & (y \gg 1) \\ 1 & (y \ll 1) \end{cases} \quad (4)$$

- [7] Mg_2SiO_4 組成のかんらん石 (α 相) の高圧相転移について考える。各鉱物間の相転移に伴う 1 気圧でのエンタルピー (ΔH°)、エントロピー (ΔS°)、モル体積の変化量 (ΔV°) は下表のとおりである。以下の設問に答えよ。

	相転移	$\Delta H^\circ(\text{J}\cdot\text{mol}^{-1})$	$\Delta S^\circ(\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1})$	$\Delta V^\circ(\text{cm}^3\cdot\text{mol}^{-1})$
A	かんらん石 (α) $\rightarrow \beta$	30000*	-7.7*	-3.16
B	$\beta \rightarrow \gamma$	9100*	-7.3*	-0.98
C	$\gamma \rightarrow \text{MgSiO}_3$ ペロフスカイト + MgO	86100	1.2	-3.79

*は 1000 K での値、他は 298 K での値 (Akaogi et al., 1989; Akaogi and Ito, 1993)。

- 7-1. 地球のマントルにおいて、表の β , γ , MgSiO_3 ペロフスカイト, MgO に対応する 4 つの鉱物の名称をそれぞれ答えよ。

- 7-2. 表の A~C の相転移の次数を理由とともにまとめて 3 行以内で答えよ。

- 7-3. C の相転移において、 ΔS° が正である理由を、以下の語群中の語句を全て用いて鉱物学的な観点から 5 行以内で説明せよ。

語群【スピネル構造、配位数、陽イオン-酸素間距離、格子振動】

- 7-4. ある温度 (T)、圧力 (P) において、共存する 2 相のギブス自由エネルギーの差 (ΔG) は 0 である。この相境界線の傾き ($\frac{dP}{dT}$) を、エントロピー変化 (ΔS) と体積変化 (ΔV) を用いて表せ。導出過程も記述すること。

- 7-5. A, B, および C の相転移が地球マントル内部で起こった場合、各相転移境界においてマントル温度は上昇するか、減少するかをそれぞれ理由とともに答えよ。

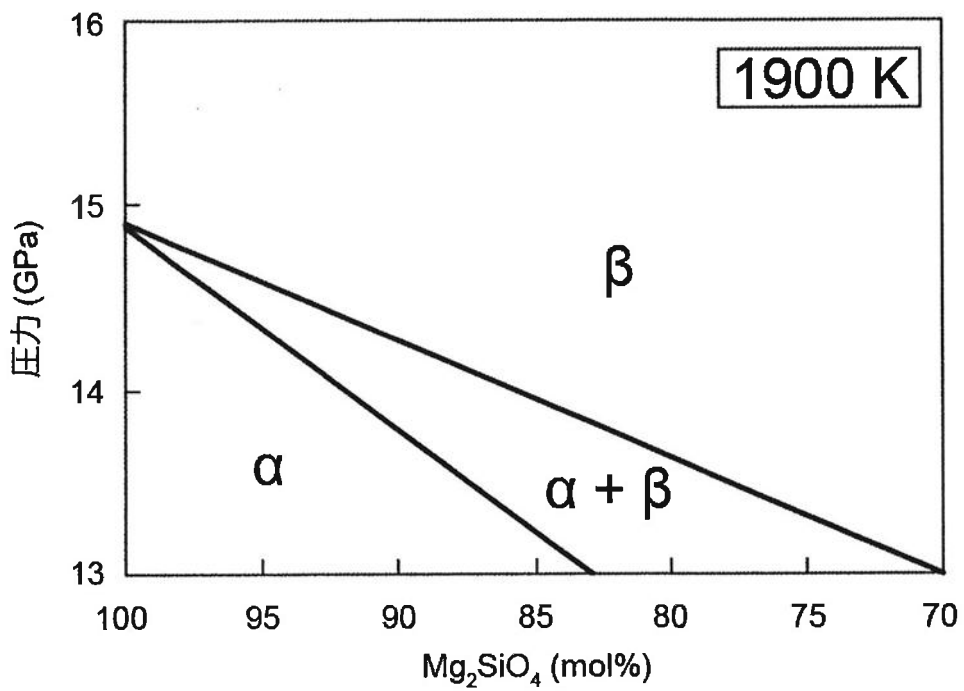
- 7-6. 設問 7-3, 7-4 を参考にして、 MgSiO_3 ペロフスカイト-ポストペロフスカイト相転移境界のクラペイロン勾配の符号を各結晶構造の特徴に言及しながら答えよ (合わせて 5 行以内)。

- 7-7. A の α - β 相転移に対する ΔG の圧力・温度依存性の式を ΔH° , ΔS° , ΔV° 及び 1 気圧での定圧熱容量変化 $\Delta C_p(T)$ を用いて表せ。

- 7-8. A の α - β 相転移に伴う ΔV° の圧力、温度依存性はないと仮定した場合、上の表の値から、1000 K における α - β 相転移圧力は何 GPa となるか。有効数字 3 桁で答えよ。

- 7-9. Mg_2SiO_4 - Fe_2SiO_4 の理想固溶体を考える。マグネシウムナンバー ($\text{Mg\#}$) がそれぞれ X_α , Y_β の α , β 相が平衡共存する条件式を P , T , ΔH° , ΔS° , ΔV° , $\Delta C_p(T)$, X_α , Y_β および気体定数 (R) を用いて表せ。

7-10. $\text{Mg}_2\text{SiO}_4\text{--Fe}_2\text{SiO}_4$ 系の α , β 相の 1900 K における相平衡図は以下のように書ける. 地震波観測でみられる 410 km 不連続面は $\text{Mg\#} = 90$ 程度の α 相の β 相への転移に対応すると考えられているが, 相平衡図から決められる相転移の圧力あるいは深さ幅は地震学的な不連続面の幅よりも広い. その理由を下の相平衡図を用いて 5 行以内で説明せよ.



- [8] 以下の文章を読み、問いに答えよ。ただし、ボルツマン定数を k 、プランク定数を h 、絶対温度を T 、基準振動数を ν とする。

一般に気体分子の運動エネルギーは、(ア) エネルギー、(イ) エネルギー、及び振動エネルギーの3つに分解される。古典力学では理想気体の内部エネルギーを(ア) エネルギーと(イ) エネルギーの和と考えており、運動の自由度1つあたり、(ウ) のエネルギーが割り当てられる(エネルギー等分配則)。2原子分子では(ア) および(イ) 運動の自由度はそれぞれ(A) および(B) であるため、内部エネルギーは(エ) となる。なお、3原子分子では分子構造によって(イ) 運動の自由度が変化する。

一方、同位体の質量の違いなどにより、原子や分子の物理化学的性質や挙動に差を生じることを同位体効果と呼び、その結果、異なる物質間や同一物質の2相間などにおいて同位体比が変化することを同位体分別と呼ぶ。ここでは2原子分子(気体)の同位体効果を考えてみる。同位体効果は量子力学的な効果によって生じる。その際、(ア) 及び(イ) 運動は同位体効果にほとんど影響せず、振動運動が同位体効果の大半を担っている。 x 量子力学によると、分子や原子、電子といったミクロな系において、粒子のとりうるエネルギーは離散的な値に限られる。そのため、2原子分子の分子振動を調和振動子で近似した場合、振動エネルギーの最低準位はポテンシャルエネルギーの最小値より(オ) だけ高くなる。これをゼロ点エネルギーと呼ぶ。分子振動の基準振動数は質量に依存するため、化学式が同じでも同位体異なる分子は異なるゼロ点エネルギーを有する。一般に(カ) 同位体分子の基準振動数は(キ) 同位体分子より低い。分子の解離に必要なエネルギーは、(カ) 同位体分子の方が(キ) 同位体分子よりも(ク) 従って(カ) 同位体を持つ分子は、(キ) 同位体を持つ分子より化学反応においてわずかに(ケ) といえる。

- 8-1. 空欄(ア)～(ケ)を埋める最も適切な語句を、以下の枠内にある語群から選択し、答えよ。ただし、同じ語句を2度以上用いてはならない。

語群

反応しにくい 反応しやすい 長い 短い 軽い 重い 落下 回転 蒸発 並進 消滅
小さい 大きい $\frac{1}{2}hk$ hk $\frac{3}{2}hk$ $2hk$ $\frac{5}{2}hk$ $3hk$ $\frac{7}{2}hk$ $4hk$
 $\frac{1}{2}kT$ kT $\frac{3}{2}kT$ $2kT$ $\frac{5}{2}kT$ $3kT$ $\frac{7}{2}kT$ $4kT$ $\frac{1}{2}h\nu$ $h\nu$ $\frac{3}{2}h\nu$ $2h\nu$ $\frac{5}{2}h\nu$ $3h\nu$ $\frac{7}{2}h\nu$ $4h\nu$

- 8-2. 空欄(A) および(B) に入る数字を答えよ。

- 8-3. 原子発光を利用すると、元素の種類とその存在量を計測できるのはなぜか。下線部Xおよび原子発光分析法の原理をふまえ、5行以内で説明せよ。

- 8-4. 同位体分別が生じる過程は2つ存在する。一つは平衡下における同位体効果(同位体交換反応)であり、もう一つは動的同位体効果である。それぞれの過程における同位体比変動の仕組みはどのように異なるのか、液体 H_2O の蒸発という現象を例にとり、10行以内で説明せよ。

8-5. 酸素には3つの安定同位体、 ^{16}O 、 ^{17}O 、 ^{18}O が存在する。ある物質（Xとする）が持つ酸素同位体比について、 $^{17}\text{O}/^{16}\text{O}$ 比を $R_{17}(\text{X})$ 、 $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ 比を $R_{18}(\text{X})$ とおく。また、2つの物質（XとYとする）間の同位体分別係数 α を、以下のように定義する。

$$\alpha_i^{X-Y} = R_i(\text{X}) / R_i(\text{Y}) \quad (i = 17, 18) \quad (1)$$

さらに、ある物質（Xとする）の酸素同位体比を、ある基準物質 S の酸素同位体比に対する偏差として相対的に表す δ 値（単位‰）を以下のように定義する。

$$\delta^i\text{O}(\text{X}) = \{\alpha_i^{X-S} - 1\} \times 10^3 \quad (i = 17, 18) \quad (2)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

8-5-1. δ 値が $\pm 10\%$ 以内の比較的小きな値の場合、近似的に $\delta^i\text{O}(\text{X}) - \delta^i\text{O}(\text{Y}) = 10^3 \cdot \ln \alpha_i^{X-Y}$ が成り立つことを示せ。計算の過程も示すこと。

8-5-2. 物質 X と Y に関し、 $\alpha_{17}^{X-Y} = (\alpha_{18}^{X-Y})^\beta$ が成り立つとする。ただし β は同位体質量の関数であり、質量数 j の酸素同位体質量を m_j としたとき、以下の式で与えられる。

$$\beta = (1/m_{16} - 1/m_{17}) / (1/m_{16} - 1/m_{18}) \quad (3)$$

ここで、 $\delta^{17}\text{O}$ 値を縦軸、 $\delta^{18}\text{O}$ 値を横軸とした図に物質 X と Y の値をプロットしたとき、2点を結んだ直線の傾きを有効数字2桁で求めよ。計算の過程も示すこと。なお、設問 8-5-1 の結果を用いてよい。また、 $m_j = j$ としよ。

8-5-3. 図1は、地球標準海水（SMOW: Standard Mean Ocean Water）を基準物質としたときに、様々な隕石の全岩及びその構成物が持つ $\delta^{17}\text{O}$ 及び $\delta^{18}\text{O}$ 値を示したものである。この図に地球の天然試料（岩石、鉱物、水など）の値を示すと、そのほとんどは直線 A 上に乗ることが知られている。その理由を5行以内で述べよ。

8-5-4. 図1の白丸は、ある隕石に含まれる白色包有物の酸素同位体比を表している。白色包有物の酸素同位体比は、直線 A と異なる傾きをもつ、別の直線上に並んでいる。この原因としてどのような要因が考えられるか、5行以内で述べよ。

8-5-5. 図2は図1の破線領域を拡大したものである。×印はユークライトと呼ばれるグループに属する隕石のデータを示したものである。この図を見ると、ユークライト隕石の酸素同位体比は直線 A と異なる直線 B 上に乗り、その傾きは直線 A とほぼ等しいことが分かる。このように、直線 B の y-切片は直線 A と異なる一方、両者の傾きはほぼ等しいのはなぜか、原因を5行以内で述べよ。

8-6. 酸素の安定同位体の中で、太陽系で最も高い存在度を持つのは ^{16}O である。なぜ ^{17}O 、 ^{18}O と比べて ^{16}O の存在度が卓越するのか。恒星の進化に伴う元素合成の観点から、10行以内で述べよ。

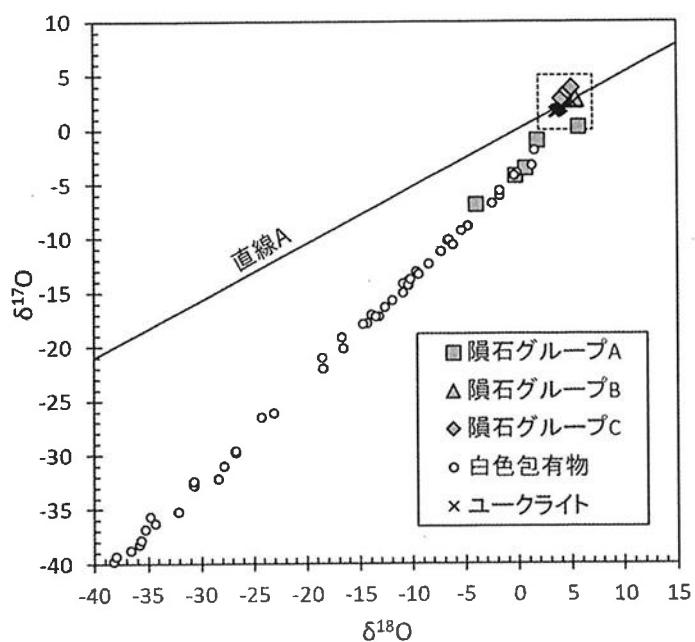


図1 隕石全岩および隕石構成要素の酸素同位体組成

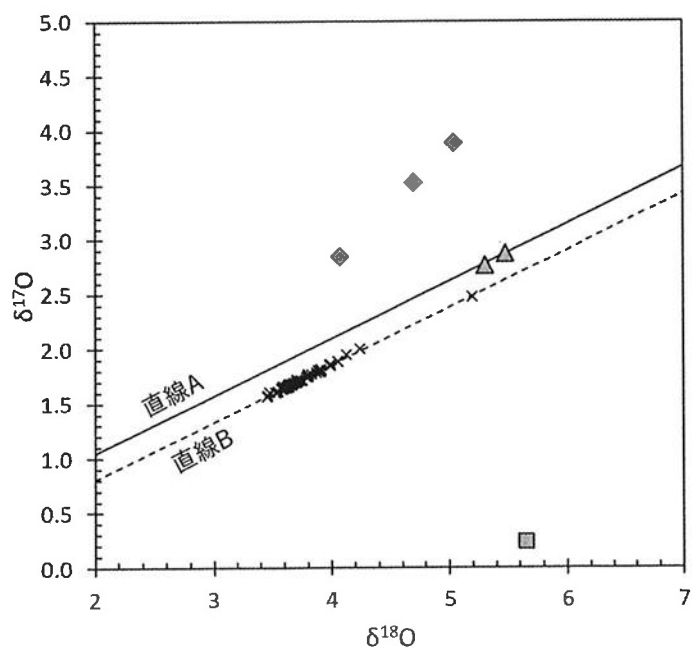


図2 図1の破線領域の拡大図