

筆答専門試験科目（午前）
地球惑星科学系

2022 大修

時間 9:30～12:00

注 意 事 項

1. 以下の4問（1～4）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各解答用紙には必ず問題番号（1～4）および受験番号を記入すること。

[1] 以下の文章を読み、問いに答えよ。

隕石とは、地球の大気圏外から落下した地球外物質である。2021 年現在、地球上で回収され、The Meteoritical Society によって名前が与えられた隕石は 65,000 個以上存在する（暫定的に隕石名が与えられたものを含む）。これらの隕石を分類する方法は複数存在するが、隕石の始原性に注目すると、隕石母天体で溶融を経験していないコンドライトと、溶融を経験した非コンドライトに二分される。一方、隕石の組織に注目すると、(1) 石質隕石、(2) 鉄隕石、および (3) 石鉄隕石の 3 種類に大分される。コンドライトは全て石質隕石である。一方、非コンドライトの石質隕石はエイコンドライト（またはエコンドライト）と呼ばれる。鉄隕石および石鉄隕石は全て非コンドライトである。

コンドライトを細分化すると、炭素質コンドライト、普通コンドライト、エンスタタイトコンドライトなどに分けることができる。炭素質コンドライトは含水鉱物や有機物を含んでいる。炭素質コンドライトの重要な構成要素である CAI (Calcium and Aluminum-rich Inclusion) は、太陽系物質最古の年代を持つことで知られる。普通コンドライトは、これまで発見された隕石の約 9 割を占める最大のグループである。探査機はやぶさが持ち帰った小惑星イトカワの微粒子を化学分析した結果、その組成が普通コンドライトと同じであることが判明した。一方、エンスタタイトコンドライトは金属を多く含む隕石である。

エイコンドライトも様々なサブグループに分けることができる。エイコンドライトの中には起源となる天体がはっきりしているものがある。例えば HED 隕石と呼ばれるグループは小惑星ベスタに由来すると考えられている。このほか、火星に由来すると考えられる SNC 隕石や、月から飛来したと考えられる月隕石も存在する。

- 1-1. 「コンドライトは母天体で溶融を経験していない」という考えを支持する、コンドライトの組織的特徴について、3 行程度で説明せよ。
- 1-2. CAI の形成年代はどのようにして求められたか。その原理も含め、10 行以内で説明せよ。式や図を用いて説明してもよい。
- 1-3. 小惑星サンプルリターン試料の化学分析を隕石の化学分析と比較したとき、どのような点が優れており、どのような問題点があるか。あわせて 10 行以内で論ぜよ。
- 1-4. コンドライト母天体の酸化還元状態を知るための方法にはどのようなものがあるか。隕石の鉄含有量に着目し、5 行程度で答えよ。なお、図を用いて説明してもよい。

1-5. 図1は隕石の年代測定から推察される母天体の集積年代と、隕石の組織などから推察した母天体中心部の最高到達温度を模式的に表したものである。このとき、以下の問いに答えよ。

1-5-1. 図1を見ると、母天体の集積タイミングが遅くなる（太陽系開始から時間がより経過する）ほど、母天体中心部の最高到達温度は低くなる傾向にある。この傾向をうみだした熱源は何か、その理由も含め、5行程度で述べよ。

1-5-2. 図1の隕石AおよびEはそれぞれどのような種類の隕石と考えられるか。理由も含め、あわせて5行程度で述べよ。

1-5-3. 図1の隕石BおよびCはそれぞれ別の種類のエイコンドライトである。両者の母天体中心部の最高到達温度はほぼ等しいにもかかわらず、隕石Bより隕石Cの方が母天体の集積タイミングが遅い。このような差が生じる原因として考えられることを、5行程度で述べよ。

1-5-4. 地球もエイコンドライト同様に、天体集積後に熔融を経験している。原始地球が熔融した原因について、10行以内で説明せよ。

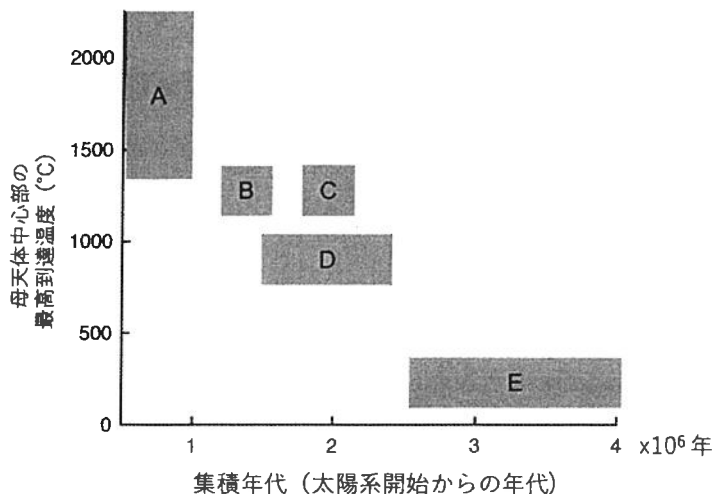


図1 隕石母天体の集積年代と母天体中心部の最高到達温度 (Kleine, 2011 を改変)。ここでは CAI の形成時刻を太陽系の開始と考える。

[2] 図表を参照し、プレートテクトニクスと火山活動に関する以下の問いに答えよ。

- 2-1. 図 1 は日本の第四紀火山の分布と日本および日本周辺のプレート境界を示したものである。日本海の基盤は海洋地殻であるのに対し、東シナ海の基盤は大陸地殻であるため、地点 1 および地点 2 の水深はそれぞれ 3550 m、150 m と異なる。両地点においてアイソスタシーが成り立っているとき、地点 2 の地殻の厚さを有効数字 3 桁で計算せよ。ただし、地殻とマントルの二層構造を仮定し、大陸地殻は密度 $2.70 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ の花崗岩、海洋地殻は密度 $3.00 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ の玄武岩、マントルは密度 $3.30 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ のかんらん岩、海洋地殻の厚さは 7000 m、海水の密度は $1.00 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ とする。
- 2-2. 地点 2 周辺域は地形学的に大陸棚と称されるが、受動的大陸縁に形成される典型的な大陸棚とは異なり、活動的大陸縁として発達したと考えられている。活動的大陸縁に特徴的に形成される地質帯やそこで生じる作用について、受動的大陸縁との違いに言及しつつ、5 行程度で説明せよ。
- 2-3. 四国海盆および太平洋に位置する地点 3、4 の水深は、それぞれ 4300 m、6400 m であり、地点 1 の水深に比べて深くなっている。しかし、基盤となる海洋地殻の厚さやプレートの岩石学的構造は地点 1、3、4 においてほとんど違いはない。各地点の水深の変化は、プレートテクトニクスの考えに基づくどのように説明されるか。3 行程度で述べよ。
- 2-4. マントル深部を基準としたプレートの運動は絶対プレート運動と呼ばれ、そのモデルの多くはホットスポット火山を基準としている。ホットスポットおよび中央海嶺におけるマグマの生成メカニズムを比較したとき、両者にどのような違いがあるか。部分融解が生じる深さに言及しつつ 3 行程度で説明せよ。
- 2-5. ホットスポット火山の軌跡から過去数千万年のプレート運動を復元する場合、基準とするホットスポットにより結果が大きく異なることが知られている。このような復元に不確定性をもたらす要因について、3 行程度で説明せよ。
- 2-6. 表 1 には日本周辺に位置するプレートの絶対運動のオイラー極（地球中心から見て時計回りの回転になる極）と回転の角速度が示されている。地点 3 と地球中心を結んだ直線とフィリピン海プレートの回転軸がなす角度を 30° 、地球半径を 6400 km、円周率を 3.14 とし、地点 3 におけるフィリピン海プレートの絶対運動の速さを計算せよ（有効数字 3 桁、単位は $\text{cm} \cdot \text{year}^{-1}$ ）。
- 2-7. 太平洋プレートの絶対運動がおおよそ $11 \text{ cm} \cdot \text{year}^{-1}$ の速さで、フィリピン海プレートの運動方向（西北西）とほぼ平行とみなせる場合、太平洋プレートの沈み込み（消失）が速いのは日本海溝および伊豆-小笠原海溝のどちらの収束境界か。問 2-6 の結果と表 1 からどのように推定したかも含めて 3 行程度で答えよ。
- 2-8. 東北日本弧および伊豆-小笠原弧に配列する島弧火山は、火山フロントの存在が明瞭な点や、火山フロントに噴出する玄武岩が低アルカリソレアイトである点など類似点が多いが、火山フロントと海溝の間の水平距離や火山帯の幅が異なっている（図 1）。このような特徴を踏まえて、地点 1-5 間および地点 3-4 間を結ぶ測線における島弧横断方向の鉛直断面図を模式的に示せ。ただし、図には沈み込むスラブ、火山フロントと火山帯、 1000°C の等温線、部分融解領域のおおよその位置を明示すること。

2-9. 図2には花崗岩質岩石の分類、表2には伊豆-小笠原弧と本州が会合する地点6に見られる花崗岩質岩石aと地点7に分布する白亜紀花崗岩質岩石bの典型的な鉱物モード組成が示されている。図2の空欄(A、B、C)に当てはまる鉱物名、および表2の岩石a、bに適切な岩石名を答えよ。

2-10. 表2の岩石a、bに含まれる斜長石を偏光顕微鏡下で観察すると、クロスニコルでの消光角の違いにより累帯構造が認められる。斜長石の2つの主要な固溶体端成分の名称と化学式を答えよ。また、結晶の中心部から周縁部にかけてどのような組成変化をしている場合に正累帯構造と称されるか、斜長石固溶体の相図を用いて説明せよ。

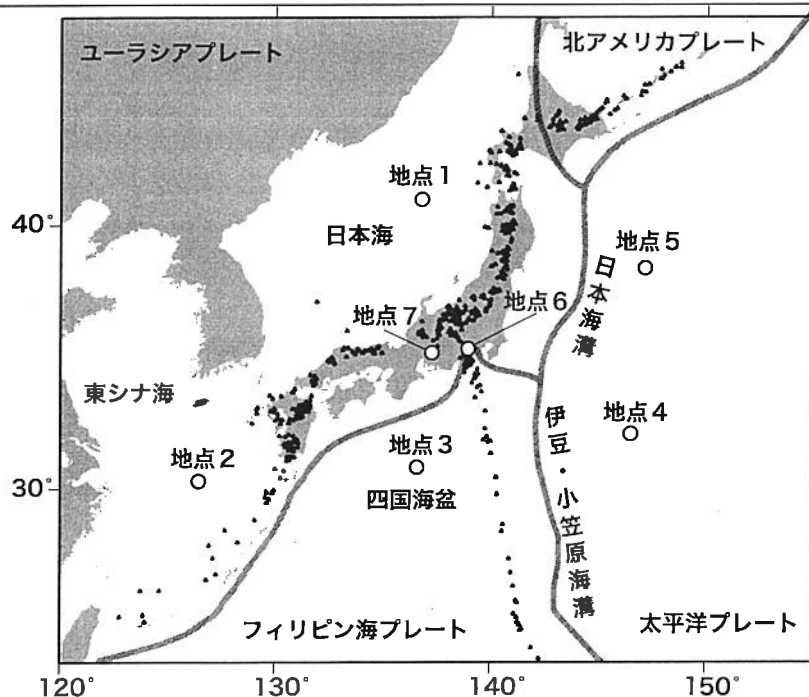


図1：日本の第四紀火山の分布と日本および日本周辺のプレート境界
(NUVEL1Aモデルに基づく)。

表1：プレートのオイラー極と回転速度 (HS3-NUVEL1Aモデルに基づく)

プレート	緯度 [°N]	経度 [°E]	回転角速度 [°・year ⁻¹]
太平洋	-61.47	90.33	1.061×10^{-6}
フィリピン海	-53.88	-16.67	1.154×10^{-6}
ユーラシア	-61.90	73.47	0.205×10^{-6}

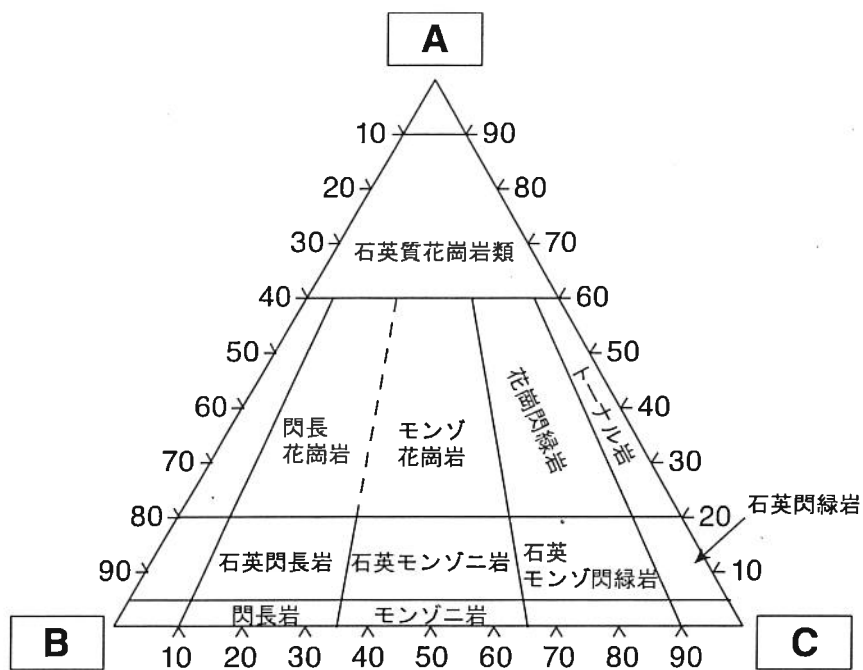


図 2：花崗岩質岩石の分類図（IUGS に基づく）

表 2：岩石 a、b の鉱物量比（％）

	岩石 a	岩石 b
斜長石	57.9	33.9
カリ長石	0.1	28.0
石英	22.1	34.6
輝石＋角閃石	12.4	0.0
黒雲母	2.6	3.0
副成分鉱物	4.9	0.5
計	100.0	100.0

[3] 次の各問いに答えよ。

3-1. 行列 A を、実数を成分とする n 行 n 列の行列とする (n は 3 以上の整数)。行列 A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とし、これらは全て相異なるとする。また、固有値 λ_i ($i = 1, \dots, n$) に属する固有ベクトルを x_i とする。

このとき、 n 個の固有ベクトルは一次独立であることを示したい。次の問いに答えよ。

3-1-1. まず、 $x_1, \dots, x_{n-1}$ は一次独立であるが、 x_n は独立ではなく、

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \quad (1)$$

と表せると仮定してみる。ただし、 a_i ($i = 1, \dots, n-1$) は実数の定数であり、少なくとも 1 つは 0 でないとする。このとき、 Ax_n を a_i, x_i, λ_i ($i = 1, \dots, n-1$) を用いて表せ。

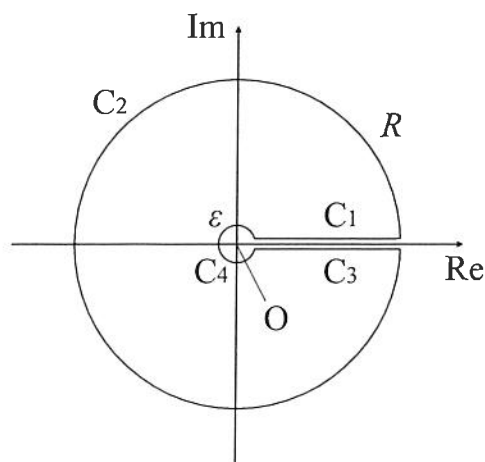
3-1-2. 前問の仮定が「固有値は全て相異なる」という前提と矛盾していることを示すことにより、 $x_1, \dots, x_n$ は一次独立であることを示せ。

3-2. 次の実関数の積分 I の値を求めたい。ただし、 p は実数で $-1 < p < 0$ である。

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^p}{x+1} dx \quad (2)$$

3-2-1. 複素数 z の関数 $z^p/(z+1)$ を考える。複素平面上の積分路 C を、図 1 のように C_1, C_2, C_3, C_4 を合わせて設定する。ただし、 ε と R は積分路の半径を表す実数で、 $0 < \varepsilon < 1, 1 < R$ とする。留数定理を用い、次の積分 J の値を求めよ。

$$J = \oint_C \frac{z^p}{z+1} dz \quad (3)$$



$$z = re^{i\theta}$$

C_1 :	$\theta = 0,$	$r = \varepsilon \rightarrow R$
C_2 :	$r = R,$	$\theta = 0 \rightarrow 2\pi$
C_3 :	$\theta = 2\pi,$	$r = R \rightarrow \varepsilon$
C_4 :	$r = \varepsilon,$	$\theta = 2\pi \rightarrow 0$

図 1

3-2-2. 積分 I の値を求めよ。ただし、値は実数のみを用いて表すこと。

3-3. 確率 p で表, 確率 $1-p$ で裏が出るコイン N 枚を一斉に投げて, 表が出るか裏が出るかをみる。各々のコインの振る舞いは独立とする。コインに $i = 1, 2, \dots, N$ と名前をつけ, i 番目のコインが表なら 1, 裏なら 0 という値をとる確率変数 X_i を定義する。

3-3-1. X_i について, 期待値 $E(X_i)$, $E(X_i X_j)$ ($i \neq j$) をそれぞれ求めよ。

3-3-2. 表を向いているコインの総数を n とする。 n を X_i を用いて表し, 期待値 $E(n)$ と分散 $V(n)$ をそれぞれ求めよ。ここで, X を任意の確率変数とすると, $V(X) = E\{(X - E(X))^2\}$ である。

3-3-3. 表を向いているコインの総数 n が従う確率分布 $f(n)$ について考える。以下の問いに答えよ。なお, 十分に大きな数 $M (\gg 1)$ に対しては Stirling の公式 $\log M! \sim M \log M - M$ を用いよ。 $\log$ は自然対数を表す。

3-3-3-1. $f(n)$ を, 場合の数を考えることによって求めよ。

3-3-3-2. N, n がともに十分に大きい ($1 \ll n \ll N$) とき, $f(n)$ を最大にする n の値 n_* を求めよ。

3-3-3-3. N, n がともに十分に大きい ($1 \ll n \ll N$) とき, $f(n)$ はどのような確率分布に近づくか。 $\log f(n)$ を $n = n_*$ のまわりで 2 次の項まで展開し, $n - n_*$ が標準偏差 $D(n) = \sqrt{V(n)}$ 程度の範囲内における $f(n)$ の具体的な形を示して論じよ。

[4]

4-1. ガソリンエンジンを単純化した熱機関であるオットーサイクル (Otto cycle) を考える。図1はこの熱機関の圧力 (p) と体積 (V) の線図である。図中の数字は状態番号を示しており、このサイクルは、2つの断熱過程 ($1 \rightarrow 2$ と $3 \rightarrow 4$) と2つの定積過程 ($2 \rightarrow 3$ と $4 \rightarrow 1$) で構成されている。ただし、すべての過程は準静的であるとする。作動流体として、理想気体を考え、状態1での気体の圧力を p_1 、体積を V_1 とし、状態2での気体の体積を $V_2 (< V_1)$ とする。また、定積過程 $2 \rightarrow 3$ において気体に与える熱量を $Q_{23} (> 0)$ とする。以下の問いに答えよ。

4-1-1. 気体の定積モル比熱を c_V 、定圧モル比熱を c_p とした時、 $c_p - c_V = R$ の関係式が成り立つことを示せ。ただし、 R は気体定数とする。

4-1-2. 断熱過程において、 pV^γ が一定となることを示せ。ただし、 $\gamma = c_p/c_V$ とする。

4-1-3. 断熱過程 $1 \rightarrow 2$ において、気体が外界に対してした仕事 $W_{12} (< 0)$ を求めよ。ただし、結果は γ, p_1, V_1, V_2 のみを用いて書き表せ。

4-1-4. 断熱過程 $3 \rightarrow 4$ において、気体が外界に対してした仕事 $W_{34} (> 0)$ を求めよ。ただし、結果は $Q_{23}, \gamma, p_1, V_1, V_2$ のみを用いて書き表せ。

4-1-5. この熱機関の効率を $\eta = (W_{12} + W_{34})/Q_{23}$ と定義する。 η を求めよ。ただし、結果は γ, V_1, V_2 のみを用いて書き表せ。

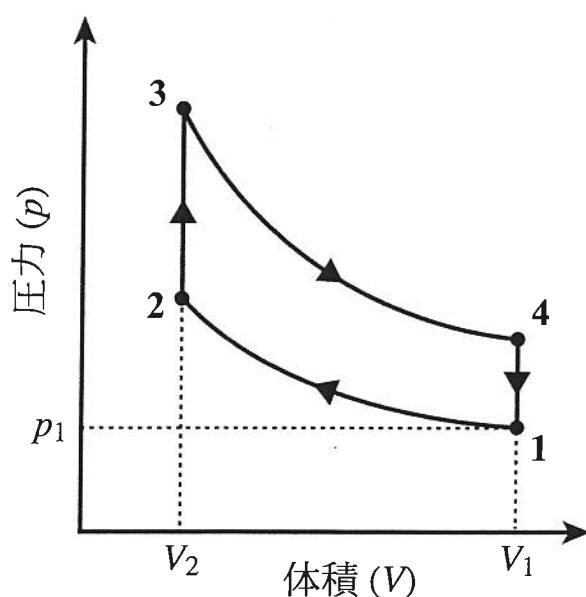


図1

- 4-2. 任意の密度分布をもつ天体を考え、その天体が任意の位置 $\mathbf{r}$ にある物体に及ぼす単位質量あたりの重力 (つまり重力加速度) をベクトル $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ で表す。以下では $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ を「重力場」と呼ぶことにする。位置 $\mathbf{r}$ における天体の質量密度を $\rho(\mathbf{r})$ とすると、ニュートン力学のもとでは $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ は以下の微分方程式を満たす。

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -k\rho(\mathbf{r}) \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

ここで、 ∇ はナブラ演算子であり、 k は密度分布に依らない正の定数である。以下では、密度分布 $\rho(\mathbf{r})$ および重力場 $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ は時間変化しないとする。以下の問に答えよ。

- 4-2-1. 定数 k は万有引力定数 G を用いて書き表すことができる。このことを示すために、点状の天体がつくる重力場を考える。原点に質量 M の点状天体が存在するとき、その周囲の重力場は

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (3)$$

と書ける。ここで、 r は原点からの距離、 $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ は r 方向の単位ベクトルである。式 (1) を適当な領域 V で体積積分し、さらに式 (3) が式 (1) を満たすことを用いて、 k と G の関係を求めよ。具体的に領域 V をどのように取るか簡潔に説明を加えること。

- 4-2-2. 任意の与えられた重力場のもとで、質量 m の質点が空間中の閉曲線 C 上を運動しているとする。式 (1), (2) のうち必要なものを用いて、質点が C をちょうど1周する間に重力場が質点にする仕事 W を求めよ。

- 4-2-3. 無限に長い静止した柱状のガス雲を考える (図2)。このガス雲の密度は、ガス雲の中心軸からの距離 R だけに依存し、具体的に以下のように与えられているとする。

$$\rho(R) = \frac{\rho_0}{(1 + \alpha R^2)^2} \quad (4)$$

ここで ρ_0, α は正の定数である。

- 4-2-3-1. 密度分布の対称性より、このガス雲がつくる重力場は雲の中心軸に直交し、かつ中心軸の方向を向く (図2を参照)。同じく対称性より、ガス雲がつくる重力場の大きさ $g \equiv |\mathbf{g}|$ は R のみの関数である。式 (1) またはその積分形を用いて $g(R)$ を求めよ。結果は k, R, ρ_0, α のみを用いて書き表せ。

- 4-2-3-2. ガスは理想気体であるとする、その圧力は $P = c^2 \rho$ のように表せる。ここで、 c は等温音速と呼ばれる量である。ガス雲の温度は一様であるとする、 c は正の定数である。中心軸からの距離 R の位置において、ガスにかかる単位体積あたりの圧力勾配力の方向と大きさを求めよ。結果は R, ρ_0, c, α のみを用いて書き表せ。

4-2-3-3. ガス雲のいたるところでガスにかかる重力と圧力勾配力が釣り合っているとする。このときに ρ_0 が満たすべき条件を求めよう。まず、問 4-2-3-1. の結果を用いて、中心軸からの距離 R の位置においてガスにかかる単位体積あたりの重力の大きさを、 k, R, ρ_0, α のみを用いて書き表せ。さらに、問 4-2-3-2. の結果を用いて、重力と圧力勾配力が釣り合っているときの ρ_0 を α, c, k のみを用いて書き表せ。

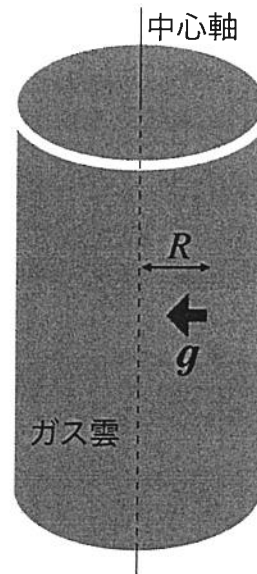


図2

筆答専門試験科目（午後）
地球惑星科学系

2022 大修

時間 13:30～16:00

注 意 事 項

1. 以下の4問（5～8）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各解答用紙には必ず問題番号（5～8）および受験番号を記入すること。

[5]

- 5-1. 量子力学的粒子の1次元 x 方向の時間に依存しない運動を考える。この粒子の運動は、次の時間に依存しない1次元 Schrödinger 方程式に従う。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + V(x)u = Eu \quad (1)$$

ここで、 $\hbar = h/(2\pi)$, h はプランク定数, m は粒子の質量, u は波動関数, V はポテンシャル, E はこの粒子が持つエネルギーである。

以下では、粒子が x 軸の負の方向から正の方向に向かって入射しているとし、ポテンシャル $V(x)$ が V_0 (正の定数) を用いて次のような階段状関数で表される場合を考える。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0, \text{ 領域 (I)}) \\ V_0 & (0 \leq x, \text{ 領域 (II)}) \end{cases} \quad (2)$$

- 5-1-1. 領域 (I) には、正の方向に進む入射波と負の方向に進む反射波が存在している。領域 (I) における波動関数の波数を k ($k > 0$) と書くとする。入射波の波動関数の振幅を A , 反射波の振幅を B として、領域 (I) における波動関数 $u_I(x)$ を、 A, B, k, x を用いて表せ。

- 5-1-2. 粒子の持つエネルギー E が $V_0 < E$ の場合を考える。

領域 (II) には、正の方向に進む透過波が存在している。この領域における波動関数の波数を k' ($k' > 0$), 振幅を C とし、領域 (II) における透過波の確率の流れの密度 S_T を、 $k', C, m, \hbar$ を用いて表せ。

- 5-1-3. 粒子の持つエネルギー E が $V_0 < E$ の場合、この階段状ポテンシャルの透過率 T を、 k と k' を用いて表せ。

ただし透過率とは、単位時間あたりに入射する粒子数に対する透過粒子数の比である。

- 5-1-4. 粒子の持つエネルギー E が $0 < E < V_0$ の場合を考える。

この場合、粒子の存在確率は $x = 0$ から x 座標が大きくなるにつれて減少する。確率密度が $x = 0$ でのそれに比べて $\exp(-1)$ 倍になる位置 x_1 を求め、 $m, E, V_0, \hbar$ を用いて表せ。

5-2. 屈折率（＝真空中の光速/物質中の光速）が場所によって変化する物質中を伝播する光の経路について考える。光は伝播の所要時間が最小となる（光路長が最小となる）経路を通る（Fermat の原理）。以下の問いに答えよ。真空中の光速は c とする。

5-2-1. 屈折率が異なる 2 つの層からなる物質中を進む光を考える。この 2 つの層は平面で接しているとし、その境界面に垂直な面内での光の伝播を考える。図 1 のように、光は屈折率 n_1 の層 1 にある点 A から境界線上にある点 P を通って屈折率 n_2 の層 2 にある点 B に向かって進むとする。層境界における入射角を θ_1 、出射角を θ_2 とする。境界線に沿って x 軸をとり、境界線に垂直で点 A を通るように y 軸をとる。

5-2-1-1. 点 A の座標を $(0, a)$ 、点 P の座標を $(x, 0)$ 、点 B の座標を (d, b) とする。光が経路 A-P-B を伝播する所要時間を x の関数として書き表せ。

5-2-1-2. Fermat の原理を利用し、 θ_1 、 θ_2 の間に成り立つ関係を n_1 、 n_2 を用いて書き表せ。

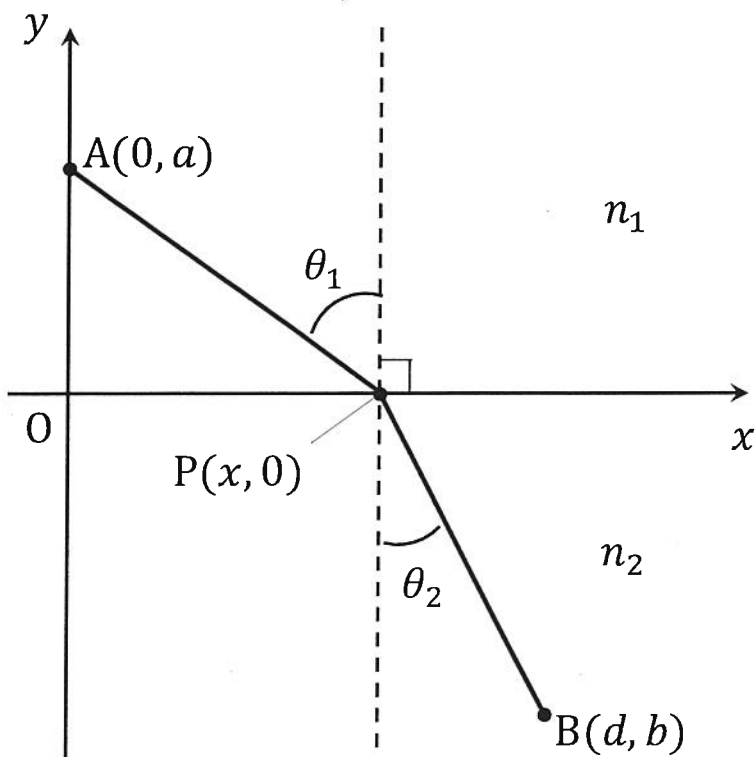


図 1

5-2-2. x - y 平面で屈折率が y 方向に連続的に変化する物質中を伝播する光の経路 $y = f(x)$ について考える。

5-2-2-1. $x, y, y'(\equiv \frac{dy}{dx})$ の関数 $F(x, y, y')$ を区間 $k \leq x \leq l$ で積分した量

$$I = \int_k^l F(x, y, y') dx \quad (3)$$

を考える。関数 $y = f(x)$ を定めると I の値が決まる。関数 $y = f(x)$ の形を $\delta y(x)$ だけ無限小変化させたとき、この関数の無限小変化に対する I の無限小変化 δI を考える。 $\delta y(k) = 0$ および $\delta y(l) = 0$ のもとでどのような δy の選び方に対しても $\delta I = 0$ であるとき、 I が停留値をとるといふ。

このとき $y = f(x)$ が

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

を満たさなければならないことを示せ。ここで、上記の無限小変化 δ をとる操作と微分の d をとる操作の順序は入れ替え可能であることを利用してよい。

5-2-2-2. 地点 1($0, y_0$) と地点 2(x_1, y_1) を結ぶ光の経路について、光が伝播に要する時間 T を式 (3) にならって x についての積分の形で書き表すとき、これに対応する関数 F を求めよ。屈折率は $n(y)$ とする。

5-2-2-3. Fermat の原理より、光が伝播に要する時間 T は停留値をとる。屈折率が $n(y) = n_0(1 - \alpha y^2)$ で表されるとき (n_0, α は正の定数)、式 (4) を用いて光の経路を表す関数 $y = f(x)$ が満たすべき微分方程式を求めよ。ただし解は求めなくてよい。

5-2-2-4. 問 5-2-2-3. の微分方程式を解いて光の経路 $y = f(x)$ を求めよ。ただし、 $(dy/dx)^2 \ll 1, \alpha y^2 \ll 1$ としてよい。

[6]

- 6-1. 実数 x を変数とし, $x \geq 0$ の範囲で定義された実関数 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ が以下の方程式を満たしている。

$$\frac{dA(x)}{dx} = -A(x)B(x) \quad (1)$$

$$\frac{dB(x)}{dx} = A(x)B(x) - \alpha B(x) \quad (2)$$

$$A(x) + B(x) + C(x) = 1 \quad (3)$$

ここで, α は実定数とする。また, $A(x), B(x) > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

- 6-1-1. $x = 0$ 付近の関数 $B(x)$ の振る舞いについて調べる。ただし, $x = 0$ 付近における x の微小変化に対して, $A(x) = A(0)$ (定数) とする。この時, 常微分方程式 (2) を解いて, 関数 $B(x)$ を, $A(0)$, $B(0)$, α を用いて x の関数として表せ。また, $R_0 = A(0)/\alpha$ とした時, x の増加に対して関数 $B(x)$ が指数関数的に増加する R_0 の条件を求めよ。ただし, ここでは $\alpha > 0$ とする。

- 6-1-2. 次に, $\alpha = 0$ の特殊な場合について考える。方程式 (1)–(3) を解き, 関数 $B(x)$ を, $B(0)$ と $C(0)$ を用いて x の関数として表せ。また, $B(0) = 0.1$, $C(0) = 0$ とした時の $B(x)$ のグラフを描け。

- 6-2. 実数 x を変数とする関数 $F(x)$ に対して, その複素フーリエ変換 $G(p)$ を以下のように定義する。

$$G(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} F(x) dx \quad (4)$$

ここで, i は虚数単位であり, p は有限の実数とする。 $F(x) = e^{-x^2}$ として式 (4) の積分を具体的に実行し, $G(p)$ を求めよ。ただし, 以下の (a), (b) を用いてよい。

(a) t を実数とすると, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

(b) 複素 z 平面上で正則な関数を $f(z)$, この複素平面上の任意の閉曲線を C とするとき, $\oint_C f(z) dz = 0$

答案では, 言葉や図などを用いて, (a), (b) をどのように用いるのかを簡潔に説明すること。

6-3. 2つの実数 x, y を変数とする関数 $I(x, y)$ に対して, その複素フーリエ変換 $V(p, q)$ を以下のように定義する。

$$V(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i(px+qy)} I(x, y) \quad (5)$$

ここで, p, q は有限の実数とする。以下では, $I(x, y)$ は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみに依存するとし, $I(x, y)$ をあらためて $I(r)$ と書くことにする。また, $k = \sqrt{p^2 + q^2}$ とする。

6-3-1. 関数 $I_1(r)$ を以下のように定義する。

$$I_1(r) = e^{-r^2} \quad (6)$$

$I(r) = I_1(r)$ について式 (5) の積分を具体的に実行し, $V(p, q)$ を k のみに依存する関数として書き表せ。問 6-2. の結果を用いてよい。

6-3-2. 整数 n , 実数 t に対して, ベッセル関数 $J_n(t)$ は以下のように定義できる。

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t \sin \alpha - n\alpha)} d\alpha \quad (7)$$

(x, y) 平面および (p, q) 平面上の極座標と, 式 (7) を用いて, 任意の $I(r)$ のフーリエ変換が

$$V(p, q) = 2\pi \int_0^{\infty} r I(r) J_0(kr) dr \quad (8)$$

のように k のみの関数として書けることを示せ。

6-3-3. 関数 $I_2(r)$ を以下のように定義する。

$$I_2(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \quad (9)$$

$I(r) = I_2(r)$ について, 式 (8) の積分を具体的に実行し, 結果をベッセル関数と k を用いて書き表せ。ただし, $J_n(t)$ が以下のように級数展開できることを用いてよい。

$$J_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n} \quad (10)$$

[7] 以下の問いに答えよ。

7-1. ある地球型惑星 X は、地表面気圧 1.0×10^{-2} bar で、ほとんどが CO_2 からなる大気と、総量 10^{20} kg の H_2O からなる海洋をもつ。この惑星の半径は 3300 km であり、地球の半径 6400 km よりも小さい。また惑星 X の質量は地球の 1/10 である。このとき以下の問いに答えよ。

7-1-1. 惑星 X の大気が全て CO_2 であるとしたとき、 CO_2 の物質量は全部で何 mol か、有効数字 2 桁で答えよ。ただし、計算の途中経過と考え方を記すこと。なお、炭素の原子量を 12、酸素の原子量を 16 とせよ。

7-1-2. 惑星 X の大気の平均的な温度は 294 K である。大気のスケールハイトは何 km か、有効数字 2 桁で答えよ。ただし、必要であれば気体定数 $8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ を用いてよい。

7-1-3. 惑星 X の海洋に溶存する炭酸の化学種は $\text{CO}_{2(\text{aq})}$ と HCO_3^- であり、その 2 種の濃度は等しい。また、これらの溶存炭酸は、海洋全体として大気と溶解平衡にあるとする。海洋の pH はいくらか、有効数字 2 桁で答えよ。ただし、炭酸の酸解離定数は $10^{-6.4}$ である。

7-1-4. 問 7-1-3 の海洋に溶存する全炭酸の海洋総量は、大気 CO_2 総量に対して何%であるか、有効数字 2 桁で答えよ。ただし、 CO_2 のヘンリー定数は $0.035 \text{ mol kg}^{-1} \text{ bar}^{-1}$ であるとしてよい。なお、計算の途中経過と考え方も記すこと。

7-1-5. 問 7-1-3 の海洋の pH が、何らかの理由により 8.4 へと変化したとする。このとき、大気 CO_2 分圧はどの様に変化すると予想されるか説明せよ。

7-2. 問 7-1 の惑星 X の大気 CO_2 は中心星からの紫外線により光解離する。一方、火山活動により CO_2 は大気に流入する。これらの CO_2 流入と消費はバランスしており、定常状態にあるとする。さらなる観測により、大気中には少量ながら O_2 が含まれることがわかった。この O_2 が大気中の CO_2 から生成しているとする、主に、どのような光化学過程で生じるか、5 行以内で説明せよ。ただし、素反応を反応式で明示すること。

7-3. 問 7-1 の惑星 X の大気 O_2 が消滅する主な過程が光解離であり、問 7-2 の O_2 生成過程とバランスしている場合、定常状態での大気 O_2 濃度は何%か、有効数字 2 桁で答えよ。ただし、この惑星環境下で O_2 の光解離速度定数は、 CO_2 のそれよりも 20 倍大きいとする。また、計算の途中経過と考え方も記すこと。

[8] 以下の設問に解答せよ。

- 8-1. 図 1 は 1 気圧における鉄(Fe)–ニッケル(Ni)系の相平衡図である。溶融した Fe-10 at.% Ni 合金を 600 °C に冷却したときに平衡結晶作用によって晶出する α 相 (カマサイト) と γ 相 (テーナイト) それぞれの化学組成と α 、 γ 相のおおよその量比を図 1 の相図に基づき答えよ。
- 8-2. 図 1 の α 相、 γ 相、 δ 相の結晶構造をそれぞれ図示し、それらの結晶構造の名称を答えよ。
- 8-3. ヘキサヘドライトと呼ばれるニッケルに乏しい隕鉄の中には立方体状に割れやすいものが存在する。ヘキサヘドライトの形状にこのような性質が生じる理由を図 1 の相図に基づき、化学組成と冷却速度に言及しながら 3 行以内で説明せよ。
- 8-4. オクタヘドライトと呼ばれる隕鉄中にはカマサイトとテーナイトからなる帯状組織が見られることがある。この特徴的な帯状組織の名称を答えよ。また、その帯状組織が形成される過程を図 1 の相図に基づき、化学組成と冷却速度に言及しながら 3 行以内で説明せよ。
- 8-5. 地球の外核は溶融した鉄に富む合金からなると考えられている。その理由を 4 行以内で答えよ。ただし、次の 4 つの語句を全て用いること。
【珪酸塩マントル、地震波観測、剛性率、密度】
- 8-6. ほぼ等量の Fe-Ni 合金と珪酸塩鉱物からなる石鉄隕石は、その組織より現在 2 種類に分類されている。それぞれの石鉄隕石の名称と主要構成鉱物を 2 つ以上答えよ。
- 8-7. 固溶体の化学組成と格子定数あるいは単位胞体積の間に直線関係が成り立つことを、ヴェーガートの法則と呼ぶ。隕石中に広く見いだされる $(\text{Mg, Fe})_2\text{SiO}_4$ かんらん石は、格子定数と単位胞体積の両方に対してヴェーガートの法則を満たす。苦土かんらん石と鉄かんらん石の単位胞体積がそれぞれ $290 \text{ \AA}^3$ 、 $307 \text{ \AA}^3$ のとき、単位胞体積が $292 \text{ \AA}^3$ のかんらん石の密度は何 $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ か、有効数字 2 桁で答えよ。なお、単位胞中に含まれる分子数 (Z) は 4 である。計算には酸素、マグネシウム、ケイ素、鉄の原子量としてそれぞれ 16、24、28、56 を、アボガドロ数として 6.0×10^{23} を用いること。
- 8-8. かんらん石の多形体の鉱物名を全て答えよ。
- 8-9. クラウジウス・クラペイロンの式を書け。また、問 8-8 で答えた相転移系列におけるクラペイロン勾配の正負を理由とともに 3 行以内で答えよ。
- 8-10. 太陽系の元素存在度から得られる Mg/Si モル比は約 1.1 である。この値は、かんらん岩から構成される地球の上部マントルの値よりも小さい。地球の平均組成が太陽系のそれと等しいと仮定した場合、下部マントルから地球中心までの化学組成はどのようなものであると考えられるか、5 行以内で述べよ。

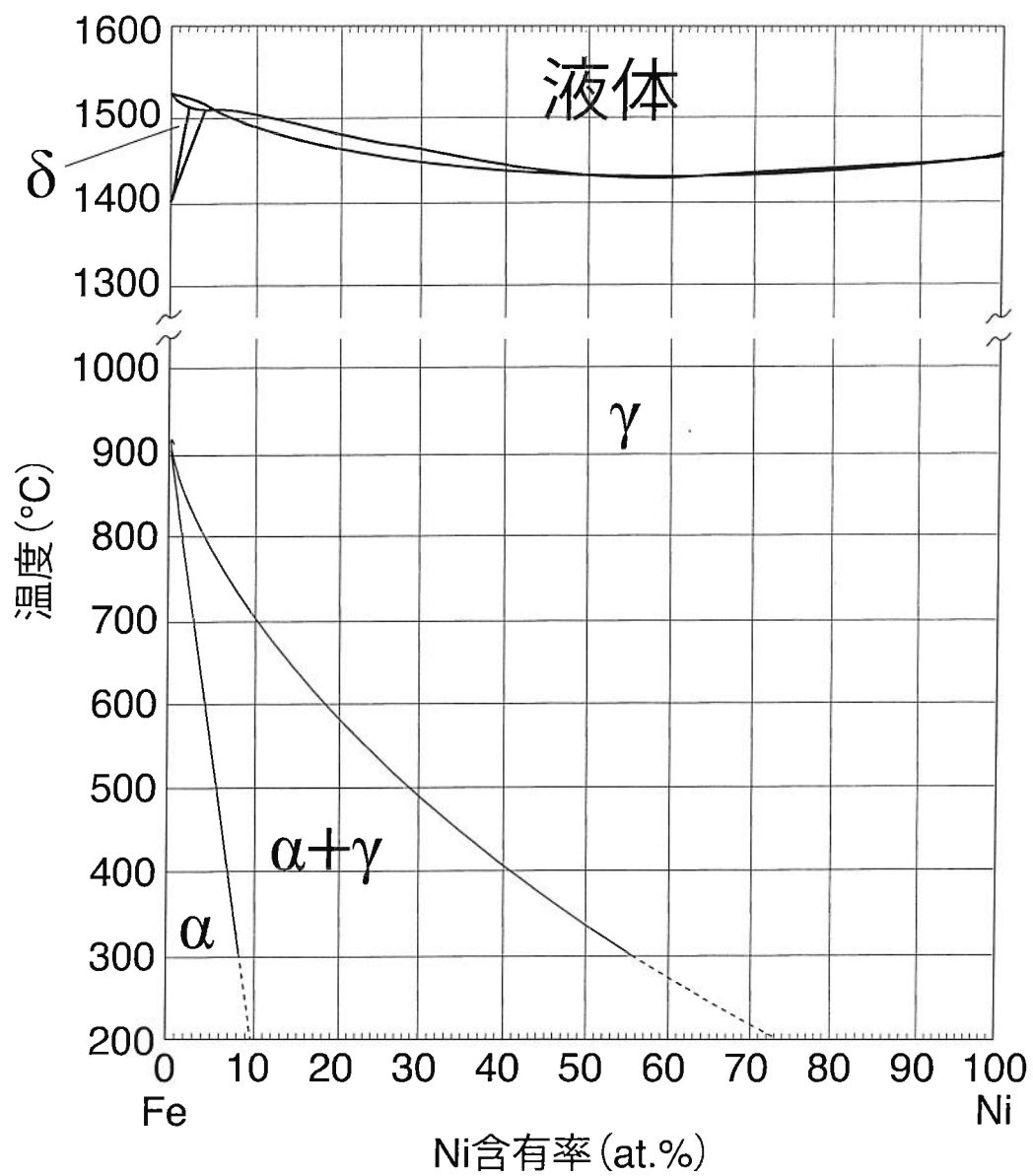


図 1. Fe-Ni 系相平衡図 (金属データブックを一部改変)