

筆答専門試験科目（午前）
地球惑星科学系

2024 大修

時間 9：30～12：00

注意事項

1. 以下の4問（1～4）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各解答用紙には必ず問題番号（1～4）および受験番号を記入すること。

[1] 地球の層構造について以下の各間に答えよ。

- 1-1. 地球の中心には金属鉄を主成分とする核が存在する。この中心核が固体の内核と液体の外核に分かれていることは、主にどのような観測から推定されたものであるか説明せよ（3行程度）。
- 1-2. 地球マントルのタンゲステン同位体比($^{182}\text{W}/^{183}\text{W}$)はコンドライトのそれよりも高い。その理由を珪酸塩マントルと金属核の間の元素分配の観点から説明せよ（5行程度）。
- 1-3. 地球マントルは、地震学的不連続面に基づき、上部マントル、マントル遷移層、下部マントルの三層に大別される。また、日本列島直下のようにプレートが沈み込む領域においては、ある深度で、沈み込んだプレート（スラブ）が滞留していることが知られている。以下の間に答えよ。
- 1-3-1. 沈み込んだスラブが滞留する要因を5行程度で説明せよ。ただし、マントルの主成分鉱物は、かんらん石とその多形であると仮定してよい。また「クラペイロン勾配」という語を必ず用いること。
- 1-3-2. 東北日本周辺の東西断面において、スラブが滞留する様子を図示せよ。ただし、上部マントル、マントル遷移層、下部マントルの三層とその境界を明示し、そのおよその深度を数字で記入すること。
- 1-4. 中央海嶺においてマグマが生じる理由をプレートテクトニクスの観点から説明せよ。また、その火成活動によって形成される海洋地殻の化学組成は、マントルかんらん岩と比較してどのような違いを有するかを述べ、その化学的特徴ができる要因を説明すること（あわせて5行程度）。
- 1-5. 地球表面のおよそ70%は平均深度約4kmの海洋に覆われている。この海水と地殻との間で生じる各元素の物質移動について、次の間に答えよ。
- 1-5-1. 海水に溶存するカルシウム(Ca^{2+})について、海洋への主要な供給過程と除去過程はそれぞれどのようなものであるか説明せよ（それぞれ2行程度）。ただし、それらの過程は主にどこで、どのように進行するものであるか、造構場と化学変化について言及すること。
- 1-5-2. 海水に溶存するマグネシウム(Mg^{2+})は Ca^{2+} と化学的性質が似ているが、 Ca^{2+} の場合とは別の除去過程も存在する。この Mg^{2+} 除去過程について、どこで、どのように進行するものであるか、造構場と化学変化を説明せよ（2行程度）。
- 1-5-3. 海水中において、硫黄(S)は主にどのような溶存化学形態で存在しているか答えよ。また、その溶存種について海水からの除去過程として主要なものを2つ答えよ（それぞれ3行以内）。ただし、それらの過程は主にどこで、どのように進行するのか、化学変化あるいは状態変化を具体的に説明すること。
- 1-6. 大気中に放出される CO_2 は温室効果を有しており、その大気中濃度の上昇は地表面温度の上昇に寄与する。このような温室効果を有する気体として、水蒸気や CO_2 の他にどのような分子があるか、炭素の化合物と窒素の化合物をそれぞれ一つ答えよ。また、現在の地球におけるそれら気体の主要な供給過程はどのようなものであるか、それぞれ答えよ。

1-7. 大気の温度構造について次の間に答えよ

1-7-1. 対流圏においては、太陽放射により温められた地表の空気塊が上昇することで対流が生じる。

このとき断熱膨張を仮定すると、およそ $9.8^{\circ}\text{C}/\text{km}$ の勾配で上昇した空気塊の温度は下がることになる。この勾配を断熱減率と呼ぶ。実際の温度勾配は、この断熱減率よりも緩やかである。その理由を 2 行程度で説明せよ。

1-7-2. 成層圏においては対流圏とは逆に、上部に向かって大気の温度は上昇するため、熱的に大気は成層している。この温度構造は、ある化学過程を通して成層圏上部の大気が加熱されるとで成立する。この大気化学過程によって新たに生成する気体分子は何か。素反応の反応式 2 つ以上を示して説明せよ。また、この大気化学過程を通して、太陽放射のエネルギーは何に変換されたか具体的に答えること（あわせて 5 行程度）。

1-8. 地球は磁場に覆われている一方、現在の火星には地球のような磁気圏は存在していない。地球磁場の形成要因を説明したうえで、何がこのような違いをもたらしたのか、考えられる要因を述べよ（あわせて 5 行程度）。

[2] 化学分析法に関する以下の設問に解答せよ。

2-1. 電磁波とは、電磁的エネルギーが空間を振動しながら伝播していく物理現象である。波長に応じて電磁波は異なる名称で呼ばれる。1) 電波、2) 赤外線、3) X線にそれぞれ相当する電磁波の波長を以下の(ア)～(オ)から選択しなさい。

(ア) 10^{-1} m (イ) 10^{-5} m (ウ) 10^{-7} m (エ) 10^{-10} m (オ) 10^{-13} m

2-2. 波長 1.0×10^{-5} m の電磁波のエネルギー（単位：電子ボルト, eV）と振動数（単位：Hz）を有効数字2桁で答えよ。ただし、光速度 $c = 3.0 \times 10^8$ m/s、プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J・s、 $1\text{J} = 6.2 \times 10^{18}\text{eV}$ とする。

2-3. 物体はその温度に応じた電磁波を放射する。特に、黒体から放射される電磁波は、波長に対する強度分布が黒体の温度のみに依存する。

2-3-1. 黒体とは何か、2行以内で簡潔に説明せよ。

2-3-2. 黒体放射の強度分布は温度に応じてどのように変化するか、図または式を用いて3行以内で説明せよ。

2-4. 電子は質量を持った粒子であり、また一方で波動としての性質も持つ。あるエネルギーを得て加速した荷電粒子の運動量はド・ブロイの関係によって波長と結びついている。しかしながら、(A)電子顕微鏡内部において加速された電子の波長は、(B)電子の静止質量とド・ブロイの関係式から導出した場合の波長とは異なる。下線を引いた波長の大小関係とその結果が生じる理由を3行以内で説明せよ。

2-5. 光学顕微鏡と電子顕微鏡の違いを以下の3つの項目全てに言及しながら5行以内で説明せよ。

波長、分解能、真空度

2-6. 透過型電子顕微鏡において、入射電子線が結晶性の試料を透過する際に、ある条件を満たすと電子線が特定の方向に回折波として強度を持ち、回折スポットを形成する。下線で示したある条件を表す式を、図を用いながら導出せよ。ただし、電子線の波長を λ 、回折を起こす結晶面間隔を d 、入射電子線と回折線がなす角度を 2θ とする。

2-7. 電子顕微鏡では、電子線を試料に照射することで主要元素の化学組成分析が可能である。その原理を、連続X線と特性X線という2つの語句を必ず用いて3行以内で説明せよ。

2-8. ある鉱物試料 1、2 を電子顕微鏡下で化学組成分析したところ、以下の表中の結果が得られた。これらの鉱物の化学式を答えよ。Mg、Fe、Si、O の原子量としてそれぞれ 24.3、55.8、28.1、16.0 を用いよ。

質量%	鉱物試料 1	鉱物試料 2
MgO	35.0	57.3
FeO	6.9	0.0
SiO ₂	58.0	42.7
トータル	99.9	100.0

2-9. 黒曜石ガラスを偏光顕微鏡、電子顕微鏡で観察する。偏光顕微鏡像、電子線回折像、化学組成分析結果それぞれについて、どのような特徴が得られるかを合わせて 5 行以内で説明せよ。

2-10. 以下の 5 種類の化学分析法の中から 3 つを選択し、選択した分析手法の原理と地球惑星科学への適用例を 1 項目につき 3 行以内で説明せよ。

- ・イオンクロマトグラフィー (IC)
- ・原子吸光法 (AAS)
- ・蛍光 X 線分析法 (XRF)
- ・赤外吸収分光法 (IR)
- ・二次イオン質量分析法 (SIMS)

[3]

3-1. 実変数 t に依存する実数ベクトル $\mathbf{v}(t)$ が以下の微分方程式を満たすとする。

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -A\mathbf{v}(t) \quad (1)$$

ここで A は正方形行列であり、 A のすべての成分は実定数である。ベクトル $\mathbf{v}(t)$ の次元 N は 2 以上の任意の整数であるとする。 A の固有ベクトルを \mathbf{w}_i ($i = 1, \dots, N$) とし、それぞれの \mathbf{w}_i に対応する A の固有値を λ_i と表す。ただし、 \mathbf{w}_i は $|\mathbf{w}_i| = 1$ のように規格化されているとする。 λ_i ($i = 1, \dots, N$) はいずれも実数であり、かつすべて異なる値を取るとする。

3-1-1. 式 (1) の一般解を $\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^N f_i(t)\mathbf{w}_i$ とおく。ここで、 $f_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) は t の関数である。 $f_i(t)$ を決定し、一般解 $\mathbf{v}(t)$ を $t, \mathbf{w}_i, \lambda_i$ 、および N 個の任意定数 C_i ($i = 1, \dots, N$) のみを用いて書き表せ。

3-1-2. 以下では、式 (1) の微分方程式を差分化して近似的に解くことを考える。すなわち、正の実定数 h に対して、 $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}(nh)$ ($n = 0, 1, \dots$) とおき、 \mathbf{v}_n を以下の漸化式から近似的に求めることとする。

$$\frac{\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n}{h} = -A\mathbf{v}_n, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2)$$

与えられた初期ベクトル \mathbf{v}_0 に対して、この漸化式の解は以下のように書ける。

$$\mathbf{v}_n = B^n \mathbf{v}_0, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

ここで、 B は正方形行列である。 B を A, h 、および単位行列 I を用いて書き表せ。

3-1-3. B の固有ベクトルを \mathbf{z}_i ($i = 1, \dots, N$) とし、それぞれの \mathbf{z}_i に対応する B の固有値を σ_i とする。ただし、 \mathbf{z}_i は $|\mathbf{z}_i| = 1$ のように規格化されているとする。 \mathbf{w}_i が A の規格化された固有ベクトルであることを利用し、 \mathbf{w}_i を用いて \mathbf{z}_i を書き表せ。さらに、対応する固有値 σ_i を λ_i, h を用いて書き表せ。

3-1-4. 縦ベクトル \mathbf{z}_i を横に並べて得られる正方形行列 $(z_1 \ z_2 \ \dots \ z_N)$ を P とおく。 B^n を σ_i ($i = 1, \dots, N$), n, P 、および P の逆行列 P^{-1} のみを用いて書き表せ。

3-1-5. λ_i ($i = 1, \dots, N$) がすべて正のとき、問 3-1-1. の結果より、 $\mathbf{v}(t)$ は $t \rightarrow \infty$ の極限でゼロベクトルに収束する。このときに式 (3) で与えられる近似解 \mathbf{v}_n も $n \rightarrow \infty$ の極限でゼロベクトルに収束するための必要条件を、 σ_i ($i = 1, \dots, N$) を用いて書き表せ。さらに、問 3-1-3. の結果を用いて、その必要条件を h に対する条件として書き直せ。

3-2. 次の各問いに答えよ。

3-2-1. 実数 ξ を変数とする関数 $I(\xi)$ がある。

$$I(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b^2} \cos(b\xi) db \quad (4)$$

次が成り立つ。

$$I(0) = \sqrt{\pi} \quad (5)$$

関数 $I(\xi)$ を ξ で微分することにより、 I についての微分方程式を求めよ。

さらに、次が成り立つことを示せ。

$$I(\xi) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) \quad (6)$$

3-2-2. 実数 x ($-\infty < x < \infty$) と t ($t \geq 0$) の関数 $u(x, t)$ が次の偏微分方程式に従う。

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

ここで、 a は実数で正の定数である。次の条件を満たす $t > 0$ における解を求める。

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial t} < 0 \quad (8)$$

$$u(x) = u(-x) \quad (9)$$

ただし、 $t = 0$ における u の値（初期条件）は次とする。

$$u(x, t = 0) = \varphi(x) \quad (10)$$

ここで、 $\varphi(x)$ も条件 (9) を満たすとする。

3-2-2-1. 偏微分方程式 (7) の解 $U(x, t)$ を、 $U(x, t) = W(x)T(t)$ と変数分離することで求める。条件 (8)(9) を満たす $U(x, t)$ が、実数 k とその関数 $A(k)$ を用い、次のように表せることを示せ。ただし、 $T(0) = 1$ とする。

$$U(x, t) = A(k) \cos(kx) \exp(-ak^2 t) \quad (11)$$

3-2-2-2. 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos[k(\xi + x)] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos[k(\xi - x)] d\xi \quad (12)$$

3-2-2-3. 初期条件 (10) も満たす解 $u(x, t)$ は, k について積分した次の形で表される。

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \cos(kx) \exp(-ak^2t) dk \quad (13)$$

ただし $A(k)$ は, 初期条件 $u(x, t=0) = \varphi(x)$ に対する次の積分により得られる。

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos(k\xi) d\xi \quad (14)$$

以上の式 (12), (13), (14), および (6) を踏まえ, 解が次の形に書けることを示せ。

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right\} d\xi \quad (15)$$

[4]

- 4-1.** ある回転軸のまわりの剛体の慣性モーメント I は、剛体の質量が連続的に分布している場合は以下の式によって求められる。

$$I = \int r^2 dm$$

ここで、 r は剛体内の微小領域の回転軸からの距離、 dm はその微小領域に含まれる質量である。

次の二つの円板（厚さは無視する）について、それぞれの円板の中心を通り、円板面に垂直な軸を回転軸とするときの、慣性モーメントをそれぞれ求めよ。どちらも質量分布は一様とする。

4-1-1. 質量 M 、半径 a の円板

4-1-2. 質量 M 、外半径 a 、内半径 b の中空円板

- 4-2.** 図1のように、回転しながら降下する円板の運動を考える。鉛直下向きには重力（加速度の大きさ g ）がかかっているとする。円板の円周に沿って糸を巻きつけ糸の端をもつと、円板はすべらず回転しながら降下する。糸は伸び縮みせず、よじれたりたわんだりもしないとする。鉛直下向きに x 軸をとり、円板の中心の座標を x とする。円板は、円板の中心を通り円板面に垂直な軸のまわりでのみ回転するとし、その回転角を θ 、慣性モーメントを I とする。円板の質量は M 、半径は h であり、円板の重心は円板の中心に一致する。この円板の運動について、以下の問い合わせに答えよ。

4-2-1. 糸の端は固定してあるとする。この系のラグランジアンを $M, h, I, g, \theta, \dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて書き表せ。ただし、ポテンシャルエネルギーの原点は $x = 0$ にとることにし、また、 $x = 0$ で $\theta = 0$ とする。 $\dot{\theta}$ は θ の時間についての1階微分を表す。

4-2-2. θ についての運動方程式を求めよ。

4-2-3. 時刻 t における円板の重心の降下運動の加速度の大きさと速度の大きさを M, h, I, g, t のうち必要なものを用いてそれぞれ書き表せ。ただし、 $t = 0$ で速度はゼロとする。また、降下加速度の大きさが最小になるのは、円板の質量分布がどのような場合かを述べよ。ただし、円板の質量 M は一定で、質量分布は回転軸に対して対称であるとする。

4-2-4. 糸の端を鉛直上向きの加速度 α で引っ張り上げ、回転する円板の中心を一定の x の位置に保つ。このときの α を M, h, I, g のうち必要なものを用いて書き表わせ。

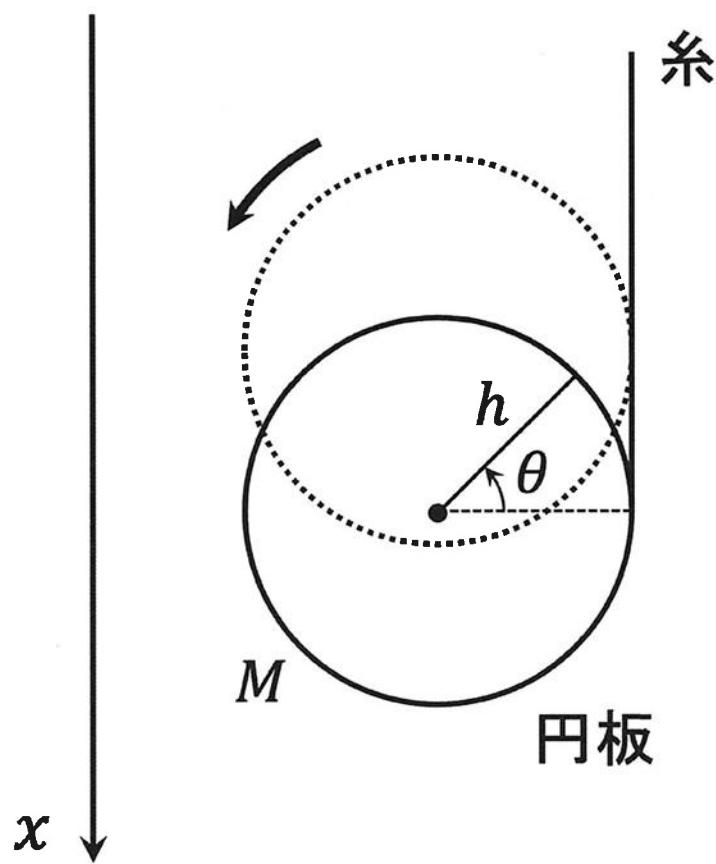


図 1

4-3. 流体に発生した衝撃波を考える。簡単のために、図2で表されるような一次元(x 座標のみ)の定常な流れ場で、かつ、原点で衝撃波面が静止している系を考える。流体の圧力を p 、速度を $u(>0)$ 、質量密度を ρ とし、衝撃波前面($x < 0$)の物理量には添え字の1を、衝撃波後面($x > 0$)の物理量には添え字の2をつけて表すものとする。また、流体として粘性のない比熱比 $\gamma (= c_p/c_v > 1)$ の理想気体を考える。ここで c_p と c_v は、それぞれ単位質量あたりの定圧比熱と定積比熱とする。また、 $\rho_2 > \rho_1$ の場合を考える。以下の問いに答えよ。

4-3-1. 理想気体の状態方程式が、 $p = R\rho T$ で与えられるとき、単位質量あたりの内部エネルギー e と圧力 p と密度 ρ の間に、 $p = (\gamma - 1)\rho e$ の関係があることを示せ。ここで、 T は温度、 R は気体の分子量に依存する気体定数とする。ただし、 $T = 0$ のとき $e = 0$ とする。また、 $c_p - c_v = R$ であることを用いてもよい。

4-3-2. 単位質量あたりのエントロピーの微小変化 ds は、系に加えられた単位質量あたりの熱量 $d'q$ を用いて

$$ds = \frac{d'q}{T} \quad (1)$$

と表される。このとき、熱力学第一法則を用いることで、理想気体の単位質量あたりのエントロピー s が次式となることを示せ。

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + s_0 \quad (2)$$

ここで、 s_0 は定数であり、 \ln は自然対数を表す。

4-3-3. 一次元の粘性のない流体の質量保存の式(連続の式)と運動量保存の式(運動方程式)がそれぞれ以下の式で与えられているとする。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4)$$

定常な流れ場を考えた時、衝撃波面の前後で、以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (5)$$

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \quad (6)$$

4-3-4. 式(5)と式(6)に加えて、衝撃波面の前後で、エネルギーが保存することから、次式も成り立っているものとする。

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (7)$$

このとき、衝撃波前面のマッハ数 $M_1 (= u_1/c_1)$ を用いて、衝撃波面前後の物理量の比 (α と β) が次のようになることを示せ。ここで c_1 は音速で、 $c_1^2 = \gamma p_1/\rho_1$ で与えられているものとする。

$$\alpha = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \quad (8)$$

$$\beta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - \gamma + 1}{\gamma + 1} \quad (9)$$

4-3-5. $M_1 > 1$ の時、衝撃波面前後のエントロピーの差 $s_2 - s_1$ が正になることを示せ。

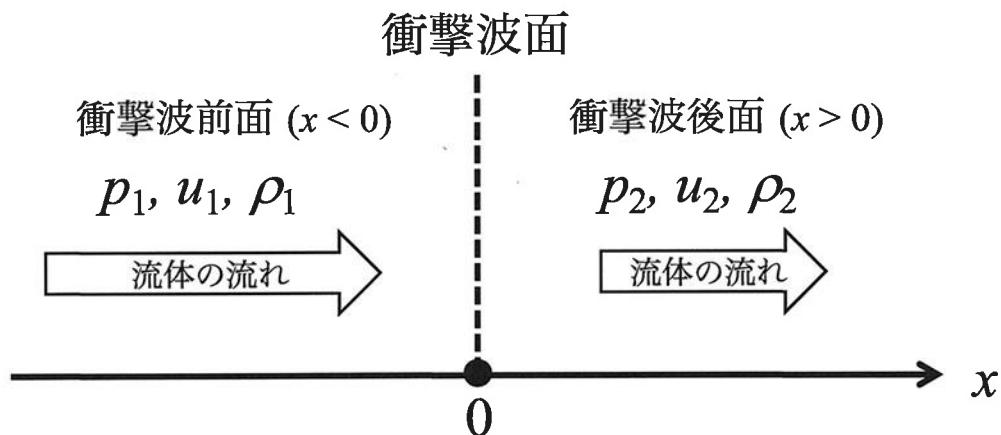


図2

筆答専門試験科目（午後）
地球惑星科学系

2024 大修

時間 13:30～16:00

注意事項

1. 以下の4問（5～8）中2問を選んで解答せよ。解答する問題は2問をこえてはならない。
2. 解答は1問ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1問につき解答用紙が複数枚にわたってもよい。
3. 各解答用紙には必ず問題番号（5～8）および受験番号を記入すること。

[5] 次の文章を読んで、化学結合とそれに関連する以下の問い合わせに答えよ。

原子価結合理論（Valence Bond theory）では、ある原子の原子軌道（オービタル）に存在する1個の原子が他の原子の原子軌道に存在する電子とスピン対をつくるとき、原子の結合が生じると考える。例えば、2つの水素原子の1s軌道どうしが σ 結合をつくることにより、水素分子H₂が形成される。ここでは、2つの水素原子の1s軌道の波動関数を線形結合することで、新たに2つの波動関数（分子軌道）がつくられる、とみなすことができる。一方、メタンCH₄は炭素原子が4つの水素原子とそれぞれ σ 結合をつくることにより、分子を形成している。メタンの分子構造は正四面体であることから、4つのC-H結合は等価であると考えられる。しかし、炭素の基底状態の電子配置は1s² 2s² 2p_x¹ 2p_y¹であり、不対電子は2つしかないとため、このままでは4つのC-H結合をつくることはできない。そこで、電子の「昇位」と「混成軌道」の考え方を導入することにより、メタンの4つの等価なC-H結合を説明することができる。

5-1. ヘリウムは通常、2原子分子をつくりない。その理由を、原子価結合法の観点から3行以内で説明せよ。

5-2. 下線部にある「昇位」と「混成軌道」について具体的に説明しながら、メタンが4つの等価なC-H結合をもつ理由を5行以内で説明せよ。図を用いてもよい。

5-3. NH₃分子のN-H結合角は約107°であり、NH₄⁺イオンのN-H結合角は109.5°である。この違いが生じる原因を、混成軌道の観点から10行以内で説明せよ。ただし、以下の語群にある単語を全て用いること。なお、図を用いてもよい。

【孤立電子対 配位結合 非局在化】

5-4. BF₃はNH₃と反応して付加化合物F₃B-NH₃を形成する。この反応を混成軌道の観点から説明し、付加化合物の構造を図で示せ。

5-5. sp²混成軌道に関連した π 結合とはどのような結合か。sp²混成軌道を持つ分子の実例を一つ挙げ、図を示しながら簡潔に説明せよ。

5-6. sp混成軌道をもつ化合物を以下より全て選べ。

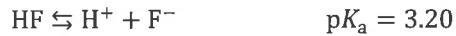
【酢酸 アセトニトリル ベンゼンスルホン酸 アセチレン 二硫化炭素 プロピレン】

5-7. 塩素を含む以下の化合物について、C-Cl結合が短い順に答えよ。また、その理由を3行以内で簡潔に述べよ。

【クロロホルム クロロメタン 四塩化炭素 ジクロロメタン】

5-8. フッ化水素酸（HF）は他のハロゲン酸である HCl, HBr, HI と異なり、酸解離定数 (K_a) が低い弱酸である。この理由を 3 行以内で述べよ。

5-9. フッ化水素酸が水溶液中で以下のような平衡に達しているとする。



フッ化水素酸の pH を 1.85 にするために必要なフッ化水素酸の濃度を有効数字 3 桁で求めよ（単位： mol L⁻¹）。必要であれば、 $\sqrt{2} = 1.41$ 、 $\sqrt{5} = 2.24$ を用いてよい。

5-10. 問 5-9 のフッ化水素酸 1000 mL に CsF を加え、フッ化水素酸の pH を 3.5 に調整したい。このとき必要な CsF の重量を有効数字 3 桁で答えよ。ただし、CsF を加えることによる液体の体積変化はなく、加えた CsF は完全に電離するものとする。また、CsF の分子量を 152 g mol⁻¹ とする。必要であれば $\log_{10} 2 = 0.3$ を用いてよい。

5-11. ケイ酸塩岩石試料のケイ素存在度を定量する際、試料に HF を加えて加熱・溶解する方法を適用することはできない。その理由を 3 行以内で述べよ。

[6]

6-1. 以下の文章を読み、問い合わせに答えよ。

小笠原諸島の福德岡ノ場は東京の南方約 1300 km に位置する海底火山で、伊豆大島～三宅島～八丈島～西之島とともに島弧火山列を形成しています。2021年8月13日に観察された巨大噴火は大量の火山灰を放出する大規模な爆発的噴火であり、その様子は気象衛星の画像に捉えられました。この噴火に伴い海に放出された多量の軽石は、海流の影響で太平洋を西向きにて漂流した後、数ヶ月後には沖縄本島や周辺の島々へ大規模に漂着したため、同地域の漁業や観光業に多大な影響を与えました。

6-1-1. 島弧火山が列をなしている理由について、ホットスポット火山列との相違点を挙げながら 5 行以内で説明せよ。

6-1-2. 福徳岡ノ場で生じた噴火は以下の噴火様式のうちどれに分類されるか、1つ選べ。
ストロンボリ式噴火 スルツェイ式噴火 プリニー式噴火 ブルカノ式噴火

6-1-3. 図 1 は福德岡ノ場の噴火後に沖縄へ漂着した軽石の薄片顕微鏡スケッチ（左：オープニコル、右：クロスニコル）、表 1 は鏡下鑑定された主要構成物の特徴をまとめたリストである。主要構成物 A～F として適切なものを以下の語群からそれぞれ 1 つ選べ。

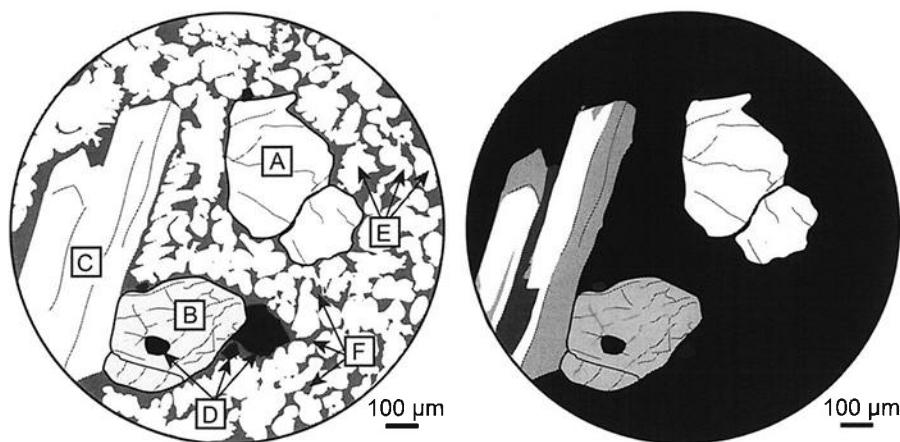


図 1

表 1

	オープニコル	クロスニコル
A	ほぼ無色透明で弱いへき開	鮮やかな干渉色、直消光
B	透明～淡緑色で顯著なへき開	A よりもやや暗い干渉色、斜消光
C	無色透明で長柱状、A や B より低い屈折率	白～灰色の干渉色、双晶に起因する明暗縞
D	黒色不透明で直線的な外形	常に暗黒
E	無色透明で円～楕円形	常に暗黒
F	褐色で A-E の外周を取り巻く	常に暗黒

語群：かんらん石、ざくろ石、单斜輝石、ひすい輝石、らん晶石、石英、磁鉄鉱、
緑泥石、斜長石、珪線石、紅柱石、方解石、蛇紋石、火山ガラス、気泡

6-1-4. 図 2 は設問 6-1-3 の軽石と西之島の噴火により流出した溶岩の全岩化学組成を火山岩の分類図上で比較したものである。図の a～c にあてはまる岩石名をそれぞれ答えよ。

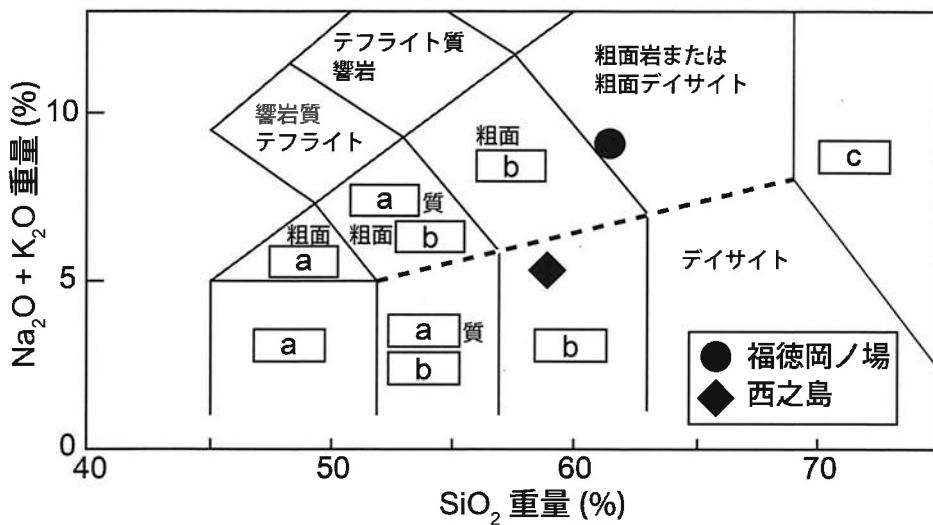


図 2

6-1-5. 図 2 によると、福德岡ノ場の軽石は西之島の溶岩と比べて $\text{Na}_2\text{O} + \text{K}_2\text{O}$ 濃度が高い特徴から「粗面岩」に分類されることがわかる。両者を区分する太点線の岩石成因論における意義に言及しつつ、両者がどのような成因的関係にあるか 5 行以内で説明せよ。ただし以下の語句を必ず使うこと【岩石系列、初生マグマ、結晶分化】。

6-1-6. 表 2 は、(1) マントルを代表するかんらん岩、(2) かんらん岩が無水 1.0 GPa , 1250°C の条件下で平衡融解した生成液、(3) かんらん岩を無水 1.0 GPa , 1400°C の条件下で平衡融解した生成液の化学組成を示している。Na や K のような鉱物に取り込まれにくい元素は液相濃集元素と呼ばれ、液中の濃度は部分融解度に強く依存する。 $\text{Na}_2\text{O} + \text{K}_2\text{O}$ が液と共存する鉱物に全く含まれないと仮定した場合、 1250°C および 1400°C で達成された部分融解度は何重量%と見積もられるか、それぞれ有効数字 2 桁で答えよ。

また、固相から分離した (2) および (3) の液がかんらん石を 40 重量%結晶化させた場合、それぞれの残液に含まれる SiO_2 と $\text{Na}_2\text{O} + \text{K}_2\text{O}$ 濃度を求めなさい（有効数字 2 桁）。ただし、結晶化したかんらん石は $\text{SiO}_2 = 40.00$ 重量%， $\text{Na}_2\text{O} + \text{K}_2\text{O} = 0$ 重量%の化学組成を持つとする。

表 2

	(1)かんらん岩	(2) 1250°C の液	(3) 1400°C の液
SiO_2 (重量%)	44.60	51.32	50.67
$\text{Na}_2\text{O} + \text{K}_2\text{O}$ (重量%)	0.32	4.87	1.69
他の成分 (重量%)	55.08	43.81	47.64

6-2. 図3はMg₂SiO₄-SiO₂系の無水2.5 GPa(左)および無水1気圧(右)における相図を示している。これをもとに以下の問いに答えよ。

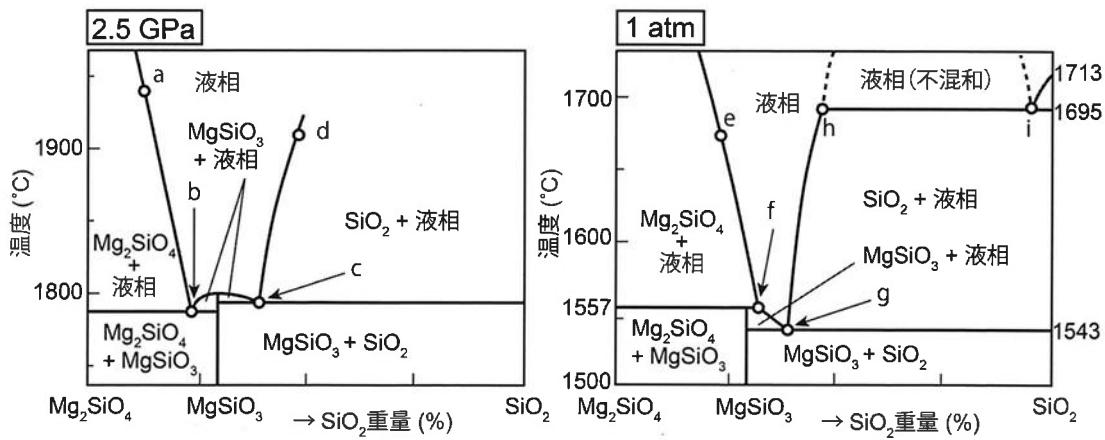


図3

6-2-1. 2.5 GPaの圧力下でMg₂SiO₄:MgSiO₃=1:1(重量比)からなる固相が融解する場合、融解が開始してから固相が完全になくなるまでの温度、液組成、共存する固相の変化を説明せよ。ただし液組成については図3のa~dを用いて表現し、温度はおおよその数字を図3から読み取ること。

6-2-2. 1気圧下でMgSiO₃:SiO₂=1:1(重量比)からなる固相が融解する場合、融解が開始してから固相が完全になくなるまでの温度、液組成、共存する固相の変化を説明せよ。ただし液組成については図3のe ~ iを用いて表現し、温度はおおよその数字を図3から読み取ること。

6-2-3. 設問6-2-1でMg₂SiO₄およびMgSiO₃相と共に存していた液が分離し、1気圧まで減圧した後に結晶化する場合を考える。平衡結晶作用と分別結晶作用の違いについて説明し、それぞれの場合について固化が始まってから固結するまでの温度変化と、温度変化に応じて結晶化する鉱物と融解液の組成変化を図3から読み取り説明せよ。

6-2-4. 図3には無水条件下における相図を示したが、プレート収束境界におけるマグマ生成の考察には含水条件下におけるマントルの融解を理解する必要がある。以下の(ア)~(ウ)は圧力2.0 GPaでH₂O飽和条件下における実験の結果である。これらの結果を参考に、2.0 GPaにおけるH₂Oに飽和したMg₂SiO₄-SiO₂系の相平衡図を解答用紙に描きなさい。

- (ア) H₂O飽和条件下では固相の融点が低くなり、Mg₂SiO₄およびSiO₂の融点はそれぞれ1410°C, 1023°Cとなる。
- (イ) MgSiO₃は1295°Cで不一致融解をし、1340°Cで液相のみになる。
- (ウ) MgSiO₃とSiO₂の共融点は無水1気圧の場合と比べて563°C低く、SiO₂がおよそ45重量%富むようになる。

6-2-5. 設問6-2-1から設問6-2-4を踏まえて、花崗岩質マグマがプレート発散境界である中央海嶺にほとんど出現しない理由について5行程度で説明せよ。また、花崗岩質マグマがプレート収束境界である沈み込み帯において頻繁に出現する理由とその生成プロセスについて5行程度で説明せよ。

[7]

- 7-1. 絶縁体による電磁波の吸収を考える。ここでは具体的に、絶縁体に入射する電磁波（以下、入射波）は、 x 方向に直線偏光し、 $+z$ 方向に進む平面波であるとする。絶縁体のまわりは真空であるとする。このとき、電場ベクトルは x 成分 E_x のみ、磁束密度ベクトルは y 成分 B_y のみを持ち、それらは $E_x/B_y = c$ の関係を満たす。ここで c は真空中の光速である。また、絶縁体は一辺が L の立方体であり、図1のように、全ての面は x, y, z 軸のいずれかに垂直であるとする。入射波は一定の角振動数 $\omega (> 0)$ をもつとする。真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ϵ_0, μ_0 とする。

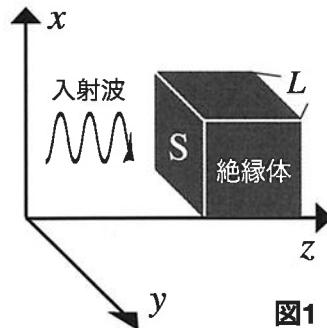


図1

- 7-1-1. 入射波は $+z$ 方向にエネルギーを運ぶ。絶縁体のすぐ外側での電磁場のエネルギー流束、もしくはエネルギーの密度と輸送速度を考えることにより、面 S (図参照) を通じて絶縁体の外から内へ単位時間あたりに運ばれる入射波のエネルギー P_{in} を求めよ。結果は $E_x, c, \epsilon_0, \mu_0, L$ のうち必要なものを用いて書き表せ。

- 7-1-2. 時刻 t の原点を調整することで、位置 z における入射波の電場を

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - z\omega/c) \quad (1)$$

と書くことができる。ここで、 $E_0 (> 0)$ は電場の振幅である。以下では、任意の時間の関数 $f(t)$ を電磁波の振動周期 1 周にわたって時間平均したものを、 $\langle f(t) \rangle$ と書き表し、単純に「 $f(t)$ の時間平均」と呼ぶことにする。前問で求めた P_{in} の時間平均 $\langle P_{in} \rangle$ が以下のように書けることを示せ。

$$\langle P_{in} \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2 L^2}{2} \quad (2)$$

ただし、 ϵ_0, μ_0, c の間に成り立つ関係と、以下の関係式

$$\langle \cos^2(\omega t - \alpha) \rangle = \langle \sin^2(\omega t - \alpha) \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \sin(\omega t - \alpha) \cos(\omega t - \alpha) \rangle = 0 \quad (3)$$

を使ってよい。ここで、 α は任意の定数である。

- 7-1-3. 以下では、絶縁体による電磁波の吸収を具体的に調べるために、絶縁体を構成するイオンや電子を独立な調和振動子の集まりで近似する。個々の調和振動子は質量

m , 電荷 q をもつ古典的な荷電粒子であるとみなし, 電磁気力に加えて摩擦抵抗力と調和ポテンシャル力を受けて運動するとする。このような近似のもとで絶縁体の電磁波への応答を調べるモデルをローレンツモデルと呼ぶ。

簡単のため, 個々の荷電粒子が電磁波に与える影響は小さいと仮定し, 絶縁体中の電磁波を入射波で近似する。さらに, 荷電粒子の運動する速さは光速よりも十分小さないと仮定し, 電磁波の磁場が荷電粒子に与える力を無視する。荷電粒子は z 方向には運動していないとし, その z 座標が 0 になるように z 軸の原点を取り直す。これらの仮定のもとでは, ローレンツモデルの個々の荷電粒子の x 方向の運動方程式は以下のように書ける。

$$m\ddot{x} = qE_0 \cos(\omega t) - m\gamma\dot{x} - m\Omega^2 x \quad (4)$$

ここで, x は荷電粒子の x 座標であり, ドットは時間微分を表す。 γ は抵抗力の比例係数, Ω は調和振動子の固有振動数であり, いずれも正の定数であるとする。

式 (4) は以下の形の特解を持つ。

$$x(t) = \frac{qE_0}{m} [A \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)] \quad (5)$$

ここで A, C は定数である。 A および C を, γ, ω , および $D \equiv -\omega^2 + \Omega^2$ のみを用いて書き表せ。

7-1-4. 式 (5) で表される運動について, 電磁波の電場が 1つの荷電粒子にする仕事を考える。任意の時刻 t において, 電場が荷電粒子に単位時間あたりにする仕事(仕事率) P_1 を, $m, q, E_0, \omega, t, A, C$ を用いて書き表せ。ただし, A および C に問 7-1-3. の結果を代入しなくてよい。さらに, 関係式 (3) を用いて仕事率の時間平均 $\langle P_1 \rangle$ を求め, 結果を $m, q, E_0, \omega, t, A, C$ のうち必要なものを用いて書き表せ。

7-1-5. 絶縁体中の電磁波を入射波で近似できるという仮定のもとでは, 絶縁体が単位時間あたりに吸収する電磁波のエネルギーの時間平均値 $\langle P_{\text{abs}} \rangle$ は絶縁体中の調和振動子の総数 (ω に依らない) と $\langle P_1 \rangle$ の積で表される。問 7-1-3. および 7-1-4. の結果を用いて, $\omega \ll \gamma \ll \Omega$ が成り立つときに $\langle P_{\text{abs}} \rangle$ が近似的に ω の 2 乗に比例することを示せ。

7-2. 質量 m の单原子分子からなる自由粒子群の、3次元空間中での運動を考える。粒子同士の相互作用（衝突）は無視できるとする。この空間中に1辺の長さ L の立方体の箱（体積 $V = L^3$ ）をとり、その中にある粒子を考える。次の各問い合わせよ。

7-2-1. この粒子の状態関数 ϕ は、空間の位置ベクトルを r として次の1粒子 Schrödinger 方程式の解 $\phi_i(r)$ で表される。添字 i はエネルギー固有状態の番号を表し、 ε_i は対応する固有エネルギーを表す。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_i(r) = \varepsilon_i \phi_i(r) \quad (0 \leq x, y, z \leq L) \quad (6)$$

ここで、 $\hbar = h/2\pi$ であり、 h はプランク定数である。

この粒子は、次の周期的境界条件を満たすとする。

$$\phi_i(0, y, z) = \phi_i(L, y, z), \quad \frac{\partial \phi_i(0, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i(L, y, z)}{\partial x} \quad (7)$$

$$\phi_i(x, 0, z) = \phi_i(x, L, z), \quad \frac{\partial \phi_i(x, 0, z)}{\partial y} = \frac{\partial \phi_i(x, L, z)}{\partial y} \quad (8)$$

$$\phi_i(x, y, 0) = \phi_i(x, y, L), \quad \frac{\partial \phi_i(x, y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \phi_i(x, y, L)}{\partial z} \quad (9)$$

このとき、規格化された固有関数 $\phi_i(r)$ とその固有エネルギー ε_i を、 \hbar, m, V 、空間の波数ベクトル $k = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ ($n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) を用いて表せ。特に、 ε_i が $V (= L^3)$ に対し次の依存性を持つことを示せ。

$$\varepsilon_i \propto V^{-2/3} \quad (10)$$

7-2-2. これらの粒子は Bose-Einstein 統計に従うとする。この系の温度を T 、化学ポテンシャルを μ とし、 i 番目の固有状態のエネルギーを ε_i とすると、大分配関数 Ξ は次のように書ける。

$$\Xi(V, T, \mu) = \prod_i [1 - \exp\{-(\varepsilon_i - \mu)/kT\}]^{-1} \quad (11)$$

大正準集合における平均を $\langle \cdot \rangle$ で表すと、固有状態 i にある粒子数の平均 $\langle n_i \rangle$ は次のようになる。

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/kT] - 1} \quad (12)$$

また、この系の圧力 p は次で求められる。

$$p = kT \left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial V} \right)_{T, \mu} \quad (13)$$

この系の内部エネルギーを E とすると、次の関係式が成り立つことを示せ。

$$pV = \frac{2}{3}E \quad (14)$$

[8]

8-1. 時刻 $t (\geq 0)$ を変数とする関数 $x(t)$ が次の微分方程式を満たしているものとする。

$$x''(t) = -kx'(t) + f(t) \quad (1)$$

ここで、 x' と x'' は、それぞれ、 x の時間 t についての 1 階微分と 2 階微分とする。また、 k は正の定数、 $f(t)$ は時刻 t を変数とする区分的に連続な関数とする。関数 x の初期条件として、

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \quad (2)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

8-1-1. 時刻 t を変数とする関数 $g(t)$ のラプラス変換 \mathcal{L} を

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt \quad (3)$$

と定義する。ここで s は実部を正とする複素数である。このとき、 $x''(t)$ のラプラス変換が

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s^2 \mathcal{L}[x(t)] \quad (4)$$

となることを示せ。

8-1-2. 式 (1) をラプラス変換することで以下の式が得られることを示せ。

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s(s+k)} \quad (5)$$

8-1-3. 次の式が成り立つことを示せ。

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(r) dr\right] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s} \quad (6)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-k(t-r)} f(r) dr\right] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s+k} \quad (7)$$

8-1-4. 式 (5)–(7) より、 $x(t)$ が以下のように求まることを示せ。

$$x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t (1 - e^{-k(t-r)}) f(r) dr \quad (8)$$

8-1-5. 互いに独立な粒子の集合を考え、ある時刻 t における粒子の位置を x とし、各粒子の運動が式(1)の微分方程式と式(2)の初期条件を満たしているものとする。関数 $f(t)$ の値が、ある確率分布にしたがうランダムな値をもつ場合、式(8)で与えられる時刻 t における粒子の位置 x は粒子毎に異なる。そこで、ここからは粒子の集合平均（アンサンブル平均）を考えることとする。関数 $f(t)$ が次の関係式を満たしているものとする。

$$E[f(t)] = 0 \quad (9)$$

$$E[f(t)f(r)] = \sigma^2 \delta(t - r) \quad (10)$$

ここで σ は正の定数、 $E[\cdot]$ はアンサンブル平均をとる記号とする（時間平均ではないことに注意）。また、 $\delta(q)$ はデルタ関数で、 $q = 0$ で連続な任意の関数 $h(q)$ に対し、 $q = 0$ を含む積分領域で

$$\int h(q)\delta(q)dq = h(0) \quad (11)$$

を満足する。このとき、時刻 t における粒子の位置のアンサンブル平均 $E[x(t)]$ が 0 となることを示せ。さらに、粒子の位置の分散 $V[x(t)] = E[\{x(t) - E[x(t)]\}^2]$ が次のようになることを示せ。

$$V[x(t)] = \frac{\sigma^2}{k^2} \left(t - 2\frac{1 - e^{-kt}}{k} + \frac{1 - e^{-2kt}}{2k} \right) \quad (12)$$

8-2. 次の関数 $f(t, x)$ を t のべき級数で表したときの, n 次の項の係数として定義される多項式 $T_n(x)$ について考える。

$$f(t, x) = \frac{1 - t^2}{1 - 2xt + t^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n \quad (|x| \leq 1, |t| < 1) \quad (13)$$

ここで, $T_0(x) = 1$ とする。以下の問い合わせに答えよ。

8-2-1. 式 (13) の両辺に $(1 - 2xt + t^2)$ を掛け, t について同じ次数の係数を比較することにより, $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$ を x の関数として具体的に書き表せ。

8-2-2. $T_n(1) = 1$, $T_{2n-1}(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) であることをそれぞれ示せ。

8-2-3. 多項式 $T_n(x)$ は次の微分方程式を満たす。 $T'_n(x)$, $T''_n(x)$ は, それぞれ $T_n(x)$ の x についての 1 階微分, 2 階微分を表す。

$$(1 - x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

式 (14) で変数 x を $x = \cos \theta$ と置き換える, 微分方程式を解くことによって

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad (15)$$

であることを示せ。必要に応じて $T_n(1) = 1$, $T_{2n-1}(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) であることは証明せずに用いてよい。

8-2-4. 前問の変数変換 $x = \cos \theta$ を用いて, 次の式が成り立つことを示せ。ただし, $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。式 (15) は証明せずに用いてよい。

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1 - x^2)^{-1/2}dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \pi/2 & (n = m \neq 0) \\ \pi & (n = m = 0) \end{cases} \quad (16)$$

8-2-5. 関数 $g(x) = \cos^{-1} x$ ($|x| \leq 1$, $0 \leq g(x) \leq \pi$) を多項式 $T_n(x)$ によって次のように級数展開する。

$$\cos^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \quad (17)$$

このとき, $T_n(x)$ の係数 a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。式 (15), (16) は証明せずに用いてよい。