筆答専門試験科目（午前）
情報通信（必答科目）

2020 大修

時間 ９：３０～１１：００

注 意 事 項

1. 次の２題すべてに解答せよ．
2. 解答は１題ごとに１枚の答案用紙に記入せよ．必要であれば，答案用紙の裏面にも記入してよいが，答案用紙の表面にその旨を明記すること．
3. １枚の答案用紙に２題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある．また，１題の解答を２枚以上の答案用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある．
4. すべての答案用紙の試験科目名欄に「情報通信」，および，解答する問題番号を記入せよ．
5. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．
6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．
7. 導出過程も答案用紙に記入すること．

この空白ページは落丁および印刷ミスではありません

H1. 実数 x,y に対する関数 $f(x,y)$，xy 平面における領域 D を式 (H1.1)，式(H1.2) にそれぞれ示す．また，式 (H1.3) に示すように $f(x,y)$ を 領域 D の範囲で積分した値を V とする．以下の問に答えよ．計算過程も示すこと．

$$f(x,y) = -(x+y)^3 - (x-y)^2 + 3(x+y) + 4 \quad \text{(H1.1)}$$

$$D: -2 \leqq x+y \leqq 2 \ \text{かつ} \ -1 \leqq x-y \leqq 1 \quad \text{(H1.2)}$$

$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{(H1.3)}$$

1）$u = x+y,\ v = x-y$ と変数変換したとき，x, y を u,v の式でそれぞれ表せ．そして xy 平面における領域 D の範囲と，uv 平面において D に対応する領域 D' の範囲をそれぞれ図示せよ．

次に，式 (H1.1) の関数 $f(x,y)$ に 1）の変数変換を施した関数を $g(u,v)$ とする．そして，$g(u,v)$ の u, v による 1 次偏導関数をそれぞれ g_u, g_v とし， $g(u,v)$ の u, v による 2 次偏導関数をそれぞれ g_{uu}, g_{uv}, g_{vu}, g_{vv} とする．

2）式 (H1.3) を $g(u,v)$ を含む式として示し，V の値を計算せよ．

3）g_u, g_v, g_{uu}, g_{uv}, g_{vu}, g_{vv} をそれぞれ求めよ．

4）$g(u,v)$ が極値をとるための g_u と g_v に関する必要条件を示し，その必要条件を満たす uv 平面上の座標 $(u,\ v)$ を列挙せよ．

5）4）で求めた座標それぞれにおいて，関数 $g(u,v)$ が「極大値」「極小値」「極値とはならない」のいずれとなるか判定せよ．

6）領域 D の範囲内における，関数 $f(x,y)$ の最大値を求め，その値を与える xy平面上の座標 $(x,\ y)$ をすべて示せ．

H2. 実数を要素とする行列と列ベクトルを考える．行列 A の転置を ${}^tA$ によって表す．また，n 次元列ベクトル X を n 行 1 列の行列と同様に扱う．ただし n は 2 以上の整数とする．このとき，以下の問に答えよ．

1) S を $n \times n$ の実対称行列とする．任意の n 次元ベクトル X, Y に対して，演算 $\langle X, Y \rangle$ を

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXSY$$

によって定義する．

a) $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle = 0$, $\langle X, X \rangle = 5$, $\langle Y, Y \rangle = 1$ であるとき，$\langle X - 2Y, 2X + Y \rangle$ の値を計算せよ．

b) $n = 2$ のとき，全ての非零の 2 次元ベクトル X について ${}^tXSX > 0$ が成り立つ対称行列 $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ を一つ示せ．

c) 次の括弧 $\boxed{\text{c-1}}$ から $\boxed{\text{c-3}}$ にあてはまる式を求めよ．ただし，同じ記号の括弧は同じ式を示す．

$a > 0$ とするとき，対称行列 S を

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

によって定め，全ての非零の 2 次元ベクトル $X = {}^t(x, y)$ について ${}^tXSX > 0$ が成り立つための必要十分条件を求めたい．このために，まず ${}^tXSX$ を計算すると

$${}^tXSX = a\left(\boxed{\text{c-1}}\right)^2 + \left(\boxed{\text{c-2}}\right)y^2 \tag{H2.1}$$

が得られる．全ての非零のベクトル X についてこの式の値が正になるためには，条件 $\boxed{\text{c-3}}$ が必要になる．他方，条件 $\boxed{\text{c-3}}$ が成り立つとき，$\boxed{\text{c-1}} = 0$ と $y = 0$ が成り立つときに限り，式 (H2.1) が零になる．この連立方程式を解くことで $(x, y) = (0, 0)$ が得られ，非零のベクトル X について ${}^tXSX > 0$ であることが示される．

2) R^3 によって 3 次元ベクトルの集合を表すとき，R^3 の部分空間

$$\{ {}^t(x, y, z) \in R^3 : 2x + y - z = 0 \}$$

の正規直交基底を一組求めよ．ただし，R^3 のベクトル $X = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ とベクトル $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ との内積を ${}^tXY = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ によって定義する．

(次ページへつづく)

(前ページのつづき)

3) $n \times n$ の実行列全体の集合を $\mathcal{M}_n$ とし，写像 $F : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ を

$$F(A) = \frac{A + {}^t\!A}{2}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$$

によって定義する．

a) 任意の行列 $A \in \mathcal{M}_n$ について $F(A)$ が対称行列であることを証明せよ．

b) 写像 $G : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ を

$$G(A) = A - F(A), \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$$

によって定義する．このとき，任意の行列 $A \in \mathcal{M}_n$ について $G(A)$ が写像 F の核，すなわち $\mathcal{M}_n$ の部分集合 $\{A \in \mathcal{M}_n : F(A) = O\}$ に属することを示せ．ただし O は $n \times n$ の零行列を示す．

筆答専門試験科目（午前）　2020 大修
情報通信（選択科目）

時間　１１：３０～１２：３０

注　意　事　項

1. 次の３題の中から１題を選択して解答せよ．２題以上解答した場合はすべて無効とする．
2. 解答は必要であれば答案用紙の裏面にも記入してよいが，答案用紙の表面にその旨を明記すること．
3. １枚の答案用紙に２題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある．また，１題の解答を２枚以上の答案用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある．
4. すべての答案用紙の試験科目名欄に「情報通信」，および，解答する問題番号を記入せよ．
5. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．
6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．
7. 導出過程も答案用紙に記入すること．

この空白ページは落丁および印刷ミスではありません

S1. k を 1 以上の整数とし，ガウス分布に従う実数の確率変数 X を考える．すなわち，x を X の実現値とすると，X の確率密度関数 $p_X(x)$ は

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{S1.1}$$

となる．ただし，m は実数の定数で平均値を表し，σ は正の定数で標準偏差を表すものとする．

以下の問では次の積分を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{S1.2}$$

なお，α は任意の正の実数である．

1) $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx$ の値を求めよ．

2) $\langle\ \rangle$ は集合平均を表し，確率密度関数を用いた平均操作とする．次式で表される $\langle (X-m)^{2k-1} \rangle$ の値を求めよ．

$$\langle (X-m)^{2k-1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^{2k-1} p_X(x)dx \tag{S1.3}$$

3) 式 (S1.3) を用いて，$\langle X \rangle$ の値を求めよ．

4) 式 (S1.2) の両辺を α について k 回微分して

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \exp(-\alpha x^2)dx = \frac{\prod_{l=1}^{k}(2l-1)}{2^k} \pi^{\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{2k+1}{2}} \tag{S1.4}$$

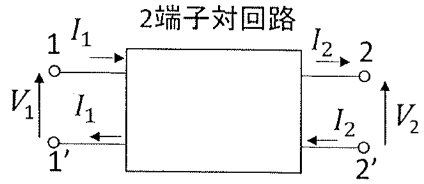
を証明せよ．

5) 式 (S1.4) を用いて，$\langle (X-m)^{2k} \rangle$ の値を求めよ．

6) 5) の結果を用いて，$\langle X^2 \rangle$ の値を求めよ．

7) $\langle X^3 \rangle$ の値を求めよ．

S2. 以下の問に答えよ．ただし，電圧，電流はすべてフェーザ表示とし，虚数単位をjとする．



図S2.1

1) V_1，I_1を端子対 1－1'の電圧及び端子に流れる電流，V_2，I_2を端子対 2－2'の電圧及び端子に流れる電流とする．図 S2.1 の２端子対回路のＦ行列は

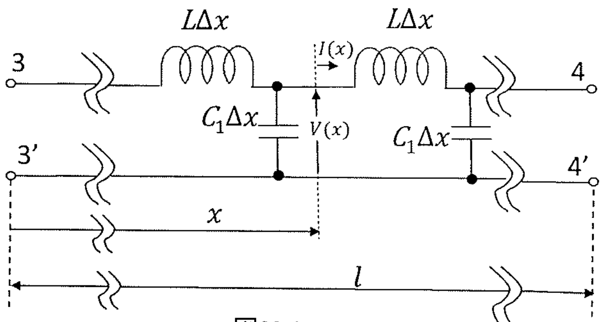
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

で表わされる．端子対 2－2'にインピーダンスがZ_Rである負荷を接続したとき，端子対 1－1'からみたインピーダンスをA，B，C，D，Z_Rを用いて表わせ．

2) 図 S2.2 の分布定数回路で表される長さ$l(l > 0)$の損失のない平行線路を考える．端子対 3－3'から角周波数ω $(\omega > 0)$の正弦波で駆動する．また，端子対 3－3'から距離xの場所の電圧を$V(x)$，電流を$I(x)$とする．平行線路は一様であり，単位長さ当たりのインダクタンスを$L(L > 0)$，単位長さ当たりの導線間の容量を$C_1(C_1 > 0)$として，微小区間Δxにおけるインダクタンスは$L\Delta x$，容量は$C_1\Delta x$とする．分布定数回路の状態を定常状態とすると，以下の微分方程式が成り立つ．

$$\frac{dV(x)}{dx} = -j\omega L \cdot I(x)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = -j\omega C_1 \cdot V(x)$$



図S2.2

a) 上記２式から$I(x)$を消去して$V(x)$の微分方程式を導出せよ．

b) a)で求めた$V(x)$に関する微分方程式の一般解を示せ．

c) 図 S2.2 の分布定数回路を２端子対回路とみなしたとき，そのＦ行列をL，C_1，l，ωを用いて示せ．端子対 3－3'を２端子対回路の入力，端子対 4－4'を出力とする．解答は三角関数に展開して示すこと．また，計算過程を示すこと．

d) 図 S2.2 の端子対 4－4'にインピーダンスがZ_Rである負荷を接続したときに，端子対 3－3'からみたインピーダンスをL，C_1，l，ω，Z_Rを用いて示せ．

e) d)において，端子対 3－3'から端子対 4－4'にむかう進行波のみが存在し，反射波が生じない時のZ_RをL，C_1，ωの中で必要なものを用いて書け．導出過程も示すこと．

f) 端子対 4－4'を短絡した．平行線路の長さlが線路を伝わる波動の波長より十分に短いとき，端子対 3－3'からみた平行線路は抵抗，コイル，コンデンサのいずれの素子とみなせるかを理由と共に答えよ．必要に応じて，$|u|$が十分に小さい場合に$\tan u \approx u$が成り立つことを用いてもよい．

g) f)の場合，L，C_1，ω，lの中で必要なものを用いて，その素子の値を書け．

S3. 幅W, 高さHの 2 次元テーブルIを考える．幅と高さは 1 以上の整数とする．テーブル内の要素の場所は整数の 2 次元座標(x,y)で表現する．同座標系は，左上隅を原点(0,0)とし，水平右方向をx軸正方向，垂直下方向をy軸正方向とする．座標(x,y)の 2 次元テーブルIの要素を$I(x,y)$と表す．図 S3.1 に，幅$W = 7$，高さ$H = 7$の 2 次元テーブルの一例を示す．同テーブルで座標$(0,0)$の要素は 6，すなわち$I(0,0) = 6$である．同様に座標$(3,4)$の要素は 7，すなわち$I(3,4) = 7$である．なお，問におけるアルゴリズムは擬似コードで書かれている．擬似コードにおける配列のインデックスは 0 から始まる．擬似コード中の変数は立体で表し，式などに現れるその他の変数は斜体で表す．

1) 2 次元テーブル内の矩形領域を考える．矩形領域の左上隅の座標を(x_0, y_0)，幅をa，高さをbの整数のパラメータで定義する．これらのパラメータを用いて同矩形領域を$\mathrm{Rect}(x_0, y_0, a, b)$と表す．例えば図 S3.1 の 2 次元テーブルにおいて，矩形領域Rect(0,0,3,2)は同図の斜線が描かれた領域を意味する．矩形領域内の要素の総和を式(S3.1)に示す．

$$S = \sum_{y=y_0}^{y_0+b-1} \sum_{x=x_0}^{x_0+a-1} I(x,y) \qquad \text{(S3.1)}$$

   a) 図 S3.1 を 2 次元テーブルIとして，矩形領域Rect(4,3,2,2)内の要素の総和を求めよ．
   b) アルゴリズム S3.2 に，式(S3.1)の方法で矩形領域内の要素の総和を返す関数 `RectSum1` の擬似コードを示す．アルゴリズム S3.2 の(1)，(2)を埋めよ．なお，2 次元テーブルIの要素は 1 次元配列に格納されている．格納順は左上隅から右下隅に走査する順とする．具体的には，原点からx軸正方向へ走査し，端まで到達したらy軸正方向に 1 だけずれて再びx軸正方向に走査する手順を繰り返す形式とする．例えば図 S3.1 の場合，6, 7, 5, 6, 2, 7, 1, 2, 3, ⋯, 2, 4, 1, 4 の順である．アルゴリズム S3.2 で，`I` は 2 次元テーブルを格納した配列の先頭へのポインタ，`I[i]`は `i` 番目に格納されている配列の値，`w`，`h` は 2 次元テーブルの幅Wと高さH，`x0`，`y0`，`a`，`b` は矩形領域のパラメータ(x_0, y_0, a, b)を表す．なお，矩形領域のパラメータは 2 次元テーブルの範囲外とならないようにあらかじめ設定されている．

2) 2 次元テーブルIを式(S3.2)に従って，2 次元テーブルKに変換することを考える．これによって矩形領域内の要素の総和計算の計算量を削減できる場合がある．

$$K(x,y) = \sum_{q=0}^{y} \sum_{p=0}^{x} I(p,q) \qquad \text{(S3.2)}$$

   a) 図 S3.1 を 2 次元テーブルIとして，式(S3.2)に従って$K(0,5)$と$K(3,3)$を求めよ．
   b) アルゴリズム S3.3 に，式(S3.2)を計算する関数 `Convert` の擬似コードを示す．アルゴリズム S3.3 の(3)～(6)を埋めよ．なお，同アルゴリズムの `I`，`w`，`h` に関する定義は問 1)-b)と同様である．また，問 1)-b)と同様に，変換された 2 次元テーブ

(次のページにつづく)

~~6~~	~~7~~	~~5~~	6	2	7	1
~~2~~	~~3~~	~~7~~	2	5	3	4
5	5	7	6	4	6	6
5	2	4	2	3	6	7
2	6	1	7	6	3	1
1	2	2	3	5	4	4
4	4	2	2	4	1	4

x y

図 S3.1

アルゴリズム S3.2

```
RectSum1(I, w, h, x0, y0, a, b){
 s = [ (1) ];
 for(y=y0; y<y0+b; y=y+1){
  for(x=x0; x<x0+a; x=x+1){
   i = [ (2) ];
   s = s + I[i];
  }
 }
 Return s;
}
```

アルゴリズム S3.3

```
Convert(I, w, h, K){
 for(y=0; y<h; y=y+1){
  s = [ (3) ];
  for(x=0; x<w; x=x+1){
   i = [ (4) ];
   s = [ (5) ];
   if(y==0){ K[i] = s; }
   else{ K[i] = [ (6) ]; }
  }
 }
}
```

アルゴリズム S3.4

```
RectSum2(K, w, h, x0, y0, a, b){
 i0 = [ (7) ];
 i1 = [ (8) ];
 i2 = [ (9) ];
 i3 = [ (10) ];
 s = K[i0] + K[i1] - K[i2] - K[i3];
 Return s;
}
```

ルKも 1 次元配列に格納する．K は同テーブルKを格納した同配列の先頭へのポインタを表す．K[i]は i 番目に格納されている配列の値を表す．

3) 問 1)の矩形領域Rect(x_0,y_0,a,b)内の要素の総和計算の計算量を削減することを考える．アルゴリズム S3.4 に，アルゴリズム S3.3 で計算された配列 K を用いて，矩形領域内の要素の総和を返す関数 RectSum2 の擬似コードを示す．パラメータの定義はこれまでの問で定義した通りである．なお，x0，y0 はそれぞれ 1 以上が与えられる．また，各パラメータは 2 次元テーブルの範囲外とならないようにあらかじめ設定されている．

a) アルゴリズム S3.4 の(7)～(10)を埋めよ．また，この関数で矩形領域内の要素の総和が求まる理由を述べよ．

b) 矩形領域内の要素の総和の計算について，アルゴリズム S3.2 の方法と，アルゴリズム S3.3 とアルゴリズム S3.4 を組み合わせた方法の 2 つを比較することを考え

る．ここでは，配列が関わる加減算の回数のみに注目し，配列のインデックスの計算や，配列のデータへのアクセスや代入などについては無視する．具体的には，アルゴリズム S3.2 の「`s = s + I[i];`」，アルゴリズム S3.3 の「`s =` $\boxed{\quad (5) \quad}$`;`」と「`K[i] =` $\boxed{\quad (6) \quad}$`;`」，アルゴリズム S3.4 の「`s = K[i0] + K[i1] - K[i2] - K[i3];`」に注目する．また，加減算の回数として，「`c = d + e;`」は 1 回，「`c = d + e - f - g;`」は 3 回と数える．さらに，2 次元テーブルの幅と高さが$W = 7$, $H = 7$，矩形領域の幅と高さが$a = 3$，$b = 3$のときを考える．このとき，アルゴリズム S3.2 の方法よりも，アルゴリズム S3.3 とアルゴリズム S3.4 を組み合わせた方法が，加減算の回数が少なくなるのは，何個以上の矩形領域についてそれぞれの総和を計算したときかを示せ．

4) 2 次元テーブルKを用いる計算方法を応用して，矩形領域内の要素の分散を求めるプログラムを作成することを考える．このプログラムは，アルゴリズム S3.3 とアルゴリズム S3.4 の関数を応用することで作成することができる．問 3)と同様に加減算の回数に注目したとき，分散を計算する矩形領域の数が多い場合に，その回数がなるべく少なくなるような作成案を簡潔に示せ．説明には式を用いてよい．なお，擬似コードを示す必要はない．