筆答専門試験科目（午前）
情報通信（必答科目）

2022 大修

時間 ９：３０～１１：００

注 意 事 項

1. 次の２題すべてに解答せよ.
2. 解答は１題ごとに１枚の答案用紙に記入せよ. 必要であれば, 答案用紙の裏面にも記入してよいが, 答案用紙の表面にその旨を明記すること.
3. １枚の答案用紙に２題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある. また, １題の解答を２枚以上の答案用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある.
4. すべての答案用紙の試験科目名欄に「情報通信」, および, 解答する問題番号を記入せよ.
5. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ.
6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない.
7. 導出過程も答案用紙に記入すること.

この空白ページは落丁および印刷ミスではありません

H1. 以下の設問1)，2)に答えよ．計算過程も示すこと．

1) 3次元空間中の曲面 A ： $16x^2+4y^2+z^2=16$ 上における1点 (x,y,z) （$x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$）と原点 $O(0,0,0)$ を結ぶ線分を1本の対角線とし，xy 平面，xz 平面，yz 平面と，それらにそれぞれ平行な3つの平面に囲まれる直方体の体積を V_1 とする．ここで V_1 を最大にする点の座標を求めることを考える．

a) 体積 V_1 を x,y,z を用いて示せ．

b) 曲面 A と xy 平面の交線の形状を図示せよ．x 軸，y 軸との交点の座標も示せ．

c) 任意の微分可能な関数 $g(x,y,z)$，$f(x,y,z)$に対して，それらの x,y,z による1次偏導関数をそれぞれ g_x,g_y,g_z および f_x,f_y,f_zとする．このとき，一般に次のことが成り立つ．条件 $g(x,y,z)=0$ のもとで関数 $f(x,y,z)$ が $g_x\neq 0$ または $g_y\neq 0$ または $g_z\neq 0$ となる点$P(a,b,c)$で極値をとるならば，以下の関係を満たす定数 λ が存在する．

$$\begin{cases} f_x(a,b,c)=\lambda\, g_x(a,b,c) \\ f_y(a,b,c)=\lambda\, g_y(a,b,c) \\ f_z(a,b,c)=\lambda\, g_z(a,b,c) \\ \qquad g(a,b,c)=0 \end{cases} \qquad \text{(H1. 1)}$$

このとき，式(H1. 1)は，点$P(a,b,c)$において，$g(x,y,z)=0$ と $f(x,y,z)=f(a,b,c)$ が表す2つの曲面が，幾何学的にどのような関係にあることを示すか 簡潔に説明せよ．

d) 式(H1. 1)の関係を曲面 A と体積 $V_1(x,y,z)$ に適用し，$V_1(x,y,z)$が極値となる点$P(a,b,c)$とλの間に成り立つ，a,b,c,λ を用いた4つの関係式を記せ．

e) 上のd)で求めた関係式により，極値となる必要条件を満たす a,b,c,λ の値をそれぞれ求めよ．ここで，その時の体積 V_1 を最大値とみなし，その値を求めよ．ただし $a>0,b>0,c>0$とする．

2) 3次元空間中の曲面 B ： $z=\log_e\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ $(z\geqq 0)$と xy 平面に囲まれる部分の体積 V_2 を求めることを考える．

a) 曲面 Bと xy 平面，xz 平面との交線の形状をそれぞれ図示せよ．各座標軸との交点があれば，その座標も示せ．

b) 直交座標(x,y)を極座標$(r,\ \theta)$に変換し，曲面Bとxy平面に囲まれ $x^2+y^2\geqq d^2$ を満たす領域の体積 $V_2{}'$ を rと θに対する定積分の式として示せ．ただし，d は $0<d<1$ を満たす定数とする．

c) 上で求めた $V_2{}'$ の式を用いて体積 V_2を求めよ．

H2.

以下の設問 1)，2) に答えよ．なお，計算過程も答案用紙に記載すること．

1) 線形写像 $f:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を次のように定義する．以下の問に答えよ．

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -15 & 0 & -4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

a) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数を求めよ．

b) 線形写像 f の核 $\mathrm{Ker} f$ の基底を一組求めよ．ただし，求める基底の組は正規化したものとし，$\dfrac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を含む組とする．

2) 実対称行列に関して，以下の問に答えよ．

a) 実対称行列 $\boldsymbol{B}$ を $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする．行列式 $\det(\boldsymbol{B})$ を求めよ．

b) 行列 $\boldsymbol{B}$ の固有値 λ を求めよ．

c) 行列 $\boldsymbol{B}$ を対角化するための直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ．

d) 自然数 n において，$\boldsymbol{B}^n$ を求めよ．

e) 任意の実対称行列 $\boldsymbol{C}$ に対して，$\boldsymbol{C}^k = \boldsymbol{O}$ となる自然数 k $(k \geqq 1)$ が存在する場合 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{O}$ であることを証明せよ．なお，$\boldsymbol{O}$ は零行列とする．

筆答専門試験科目（午前）　　　2022 大修
情報通信（選択科目）

時間　１１：３０～１２：３０

注　意　事　項

1. 次の３題の中から１題を選択して解答せよ．２題以上解答した場合はすべて無効とする．
2. 解答は必要であれば答案用紙の裏面にも記入してよいが，答案用紙の表面にその旨を明記すること．
3. １枚の答案用紙に２題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある．また，１題の解答を２枚以上の答案用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある．
4. すべての答案用紙の試験科目名欄に「情報通信」，および，解答する問題番号を記入せよ．
5. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．
6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．
7. 導出過程も答案用紙に記入すること．

この空白ページは落丁および印刷ミスではありません

S1. 離散時刻 t ($t = 1,2,\cdots$) において，S_tを２つの値 $\{1,2\}$ のいずれかをとる２値の確率変数とする．S_1の確率分布 $P(S_1)$ と，S_t が与えられたときの S_{t+1} の条件付き確率分布 $P(S_{t+1}|S_t)$ が，それぞれ次のように与えられているとする．

$$P(S_1 = 1) = P(S_1 = 2) = \frac{1}{2},\ P(S_{t+1} = j|S_t = i) = a_{i,j},\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

さらに，任意の時刻 t において $P(S_{t+1}|S_1, S_2, \cdots, S_t) = P(S_{t+1}|S_t)$ が成り立つとする．また，$\boldsymbol{q}_t$ を S_t の確率分布を表す列ベクトル $\boldsymbol{q}_t = [P(S_t = 1)\ \ P(S_t = 2)]^T$ とする．このとき以下の各問いに答えよ．

なお，$\boldsymbol{X}^T$ を行列またはベクトル $\boldsymbol{X}$ の転置，$\boldsymbol{M}^{-1}$ を正則行列 $\boldsymbol{M}$ の逆行列，$\boldsymbol{I}$ を単位行列とする．任意の正方行列 $\boldsymbol{M}$ に対して $\boldsymbol{M}^0 = \boldsymbol{I}$ と定義し，正整数 N に対して $\boldsymbol{M}^N$ を行列 $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{M}^{N-1}$ の積 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{N-1}$ とする．正方行列 $\boldsymbol{M}$ に対してあるスカラー λ および零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が成り立つとき，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{M}$ の固有ベクトルという．一般に N 個の離散確率変数の同時確率分布 $P(X_1, X_2, \cdots, X_N)$ について，$P(X_1, X_2, \cdots, X_N) = P(X_N|X_1, X_2, \cdots, X_{N-1})P(X_1, X_2, \cdots, X_{N-1})$ および $P(X_1, X_2, \cdots, X_{N-1}) = \sum_{X_N} P(X_1, X_2, \cdots, X_N)$ が成り立つ．ただし，$\sum_X$ は確率変数 X の取り得る全ての値について和をとることを表す．

1) $P(S_{t+1} = j) = \sum_{i=1}^{2} P(S_{t+1} = j|S_t = i)P(S_t = i)$ より，$\boldsymbol{q}_{t+1} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{q}_t$ である． $\boldsymbol{q}_2$ を求めよ．

2) S_1の期待値 $\mathrm{E}[S_1] = \sum_{S_1} sP(S_1 = s)$ を求めよ．ここでsはS_1の取る値である．

3) a) $P(S_1 = 2,\ S_2 = 2,\ S_3 = 2)$ を求めよ．

b) $t = 1,2,\cdots,N$ において S_t が全て 2 となる同時確率 $P(S_1 = 2, S_2 = 2, \cdots, S_N = 2)$ を N の関数として示せ．

4) t が大きくなるとともに，$\boldsymbol{q}_t$ はある列ベクトル $\boldsymbol{q}$ に近づく．

a) t が十分に大きく $\boldsymbol{q}_t = \boldsymbol{q}$ であるとするとき，$\boldsymbol{q}$ が行列 $\boldsymbol{A}^T$ の固有ベクトルであることを示せ．

b) $\boldsymbol{q}$ を求めよ．

5) 実数係数 γ ($0 < \gamma < 1$) を考える．S_t に γ^{t-1}を掛けた値 $\gamma^{t-1}S_t$ を考え，時刻 1 から N までのその総和 $\sum_{t=1}^{N} \gamma^{t-1}S_t$ の期待値 $\mathrm{E}[\sum_{t=1}^{N} \gamma^{t-1}S_t] = \sum_{t=1}^{N} \gamma^{t-1}\mathrm{E}[S_t]$ を U_N とする．

a) S_t の期待値 $\mathrm{E}[S_t]$ を $\boldsymbol{q}_t$ を用いて表せ．

b) $\boldsymbol{V}_N = \sum_{t=1}^{N} \gamma^{t-1}\boldsymbol{q}_t$ とする．このとき，$(\boldsymbol{I} - \gamma\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{V}_N = (\boldsymbol{I} - f(\gamma)(\boldsymbol{A}^T)^N)\boldsymbol{q}_1$ が成り立つ．ここで $f(\gamma)$ は γ の関数である．$f(\gamma)$ を求めよ．

c) N の関数として U_N を求めよ．

S2. 電磁界に関する以下の問に答えよ．簡単のため，誘電率ϵ_0，透磁率μ_0の真空中で考える．

1) 図 S2.1(a) に示すように，面積 S，間隔 d の平行板コンデンサーの両極板にそれぞれ $+Q, -Q$ の電荷が空間的に一様に分布している場合を考える．極板の大きさは d に比べて十分大きく，電界は極板間のみに存在し，端部の影響は無視できるものとする．このとき，両極板間の空間における電界 $\boldsymbol{E}$ は極板に垂直となる．この $\boldsymbol{E}$ の大きさを E_A とする．

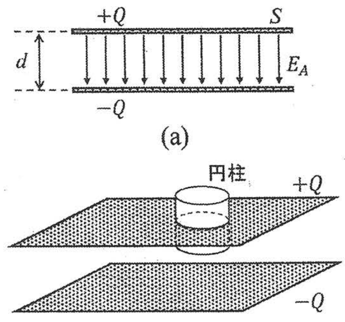

図 S2.1

a) 図 S2.1(b) のように上側の極板の上下両側にまたがる円柱を考える．円柱の中心軸は極板に垂直で，底面積は A_b，側面の面積は A_s とする．この円柱の上下の底面と側面からなる閉曲面をAとしたとき，A上での$\boldsymbol{E}$の面積分 $\int_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$ を，E_Aを用いて表せ．

b) ガウスの法則から，$E_A = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$ となることを説明せよ．

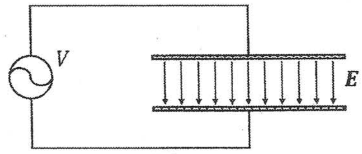

図 S2.2

c) 図 S2.2 のように，平行板コンデンサーの両極板に，時間的に変動する電圧 $V = V_0 \cos \omega_0 t$ の電圧源をつなぐ．ただし t は時刻，V_0，ω_0 は実定数である．このとき，両極板間の電界は時間変化して周囲に磁界を発生させる．この磁界は，極板間に電流が流れたことによって発生したと考えることができ，この仮想的な電流は変位電流と呼ばれる．極板間に流れたとみなされる変位電流密度 J_D を時刻 t の関数として表せ．なお J_D は $t = 0$ における電界 $\boldsymbol{E}$ と同じ向きを正とする．

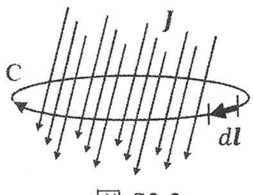

図 S2.3

2) 電荷も伝導電流も存在しない真空中において，電界 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ の時間変化により変位電流が生じた場合を考える．このとき変位電流密度 $\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$ の変位電流は，周囲の空間に磁束密度 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ の磁界をつくる．この空間内で図 S2.3 のように任意の閉曲線 C を考えたとき，C に囲まれる領域を S とする．

a) 周回積分 $\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{J}$ の関係を式で表せ．また，$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{E}$ の関係を式で表せ．

b) 前問 a) の式にストークスの定理を適用して $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ の関係式を導出する過程を説明せよ．

3) 電荷も伝導電流も存在しない真空中におけるマックスウェルの方程式は以下のようになる．

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{E} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = 0\ , \quad \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\ , \quad \mathrm{rot}\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad \text{(S2.1)}$$

ただし $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の定義は問 2)と同様である．

a) 関係式 $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ を $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の x, y, z 成分を用いて書け．

b) 式(S2.1)を満たす解のうち，z 方向に進む平面波を考える．このとき $\boldsymbol{E}$ の x 成分 E_x と y 成分 E_y が満たす微分方程式を求めると，

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \text{(S2.2)}$$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{E}_1 = (E_w, 0, 0)$，$E_w = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - 2\pi\nu t\right)$ が式(S2.2)を満たすとき，波長 λ と振動数 ν が満たす関係式を導け．なお E_0 は実定数，$\lambda, \nu > 0$ とする．

c) 前問 b) で示した関係式が満たされるとき，式(S2.2)を満たす平面波が z 方向に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギー P は $P = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}\ (E_x^2 + E_y^2)$ で与えられる．ここで，b) の $\boldsymbol{E}_1$ に加えて $\boldsymbol{E}_2 = (0, E_w, 0)$ を考えると，$\boldsymbol{E}_1$ や $\boldsymbol{E}_2$ では，P は時間に対して周期 $1/\nu$ の周期関数になる．このとき，$\boldsymbol{E}_{11} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_{12} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ のそれぞれの場合について，P の 1 周期分の平均 $< P >$ を，ϵ_0，μ_0，λ，E_0 のうち必要なものを用いて表せ．

S3. 以下の設問 1)~3) に答えよ.

1) ソートのアルゴリズムに関して，以下の a)~c) に答えよ.

以下の a) と b) において swap(x, i, j) は，サイズ N の配列 x の i 番目の要素 x[i] と j 番目の要素 x[j] を交換する関数である．配列 x に格納された数値に重複はなく，値は昇順にソートするものとする.

a) バブルソートは，隣合う値がソートされていない場合にそれらを交換することを繰り返してソートを行なう手法である．以下のバブルソートのアルゴリズムの空欄を埋めよ.

```
入力：サイズ N の配列 x
for (i=N; i > 0; i=i-1) {
    for (j=1; j < i; j=j+1) {
        if (          ) {
            swap(x, j-1, j);
        }
    }
}
```

アルゴリズム 1：バブルソート

b) 選択ソートは，ソートされていない範囲の中から最小値を探索して先頭の要素と交換することを繰り返してソートを行なう手法である．以下の選択ソートのアルゴリズムの空欄 ア)~ウ) を埋めよ.

```
入力：サイズ N の配列 x
for (i=0; i < N; i=i+1) {
    min_id = i;
    for (j=i+1; j < N; j=j+1) {
        if (    ア)    ) {
            min_id = j;
        }
    }
    swap(x, イ) , ウ) );
}
```

アルゴリズム 2：選択ソート

c) ア) アルゴリズム 1 のバブルソート

イ) アルゴリズム 2 の選択ソート

それぞれについて最大何回 swap 関数の呼び出しが発生するか，配列のサイズ N を用いて表せ.

2) プロセッサの性能に関して，以下の a)~c) に答えよ．

組み込みシステム向けのプロセッサ「ICT21-Base」がある．ICT21-Base は搭載する全ての種類の命令を 1 サイクルで実行するシングルサイクルプロセッサであり，それらの命令は演算，メモリ参照，分岐の 3 種類に分類できる．また，動作周波数は 5MHz である．ICT21-Base はある 1 つの問題を解くことに特化しており，この問題の解法を実装したプログラムAを実行したところ各種命令の出現割合は下記の表 S3.1 に示すとおりであった．

表 S3.1

命令の種類	出現割合
演算	60%
メモリ参照	10%
分岐	30%

ICT21-Base の性能向上を図るためにプロセッサに改良を施す．ただし性能とは，プログラムの実行に必要な時間の逆数とする．なおプロセッサやプログラムに対して，問に記述されている以外の変更は加えないものとする．

a) ICT21-Base に新しい演算器 α を追加搭載した．この構成を ICT21-ALU と呼ぶ．演算器 α は 2 つの演算命令を 1 サイクルで実行する．ICT21-ALU でプログラムAを実行したところ，演算命令の80%が演算器 α で実行された．このとき ICT21-ALU は ICT21-Base と比較して性能が何倍になるか，四捨五入して小数点以下 1 桁まで求めよ．

b) ICT21-Base をマルチサイクル化し，動作周波数を向上した．この構成を ICT21-MC と呼ぶ．ICT21-MC の演算命令の CPI（cycles per instruction）は 18，メモリ参照命令の CPI は 100，分岐命令の CPI は 14 である．以下の ア)~ウ) に答えよ．
ア) ICT21-MC でプログラムAを実行したときの CPI を求めよ．
イ) ICT21-MC は ICT21-Base と比較して性能が 20 倍であった．ICT21-MC の動作周波数を求めよ．
ウ) マルチサイクル化によって動作周波数向上が可能となる理由を述べよ．

c) 前問 b) の ICT21-MC にハードウェアキャッシュを搭載した．この構成を ICT21-MC-Cache と呼ぶ．キャッシュヒット時のメモリ参照命令の CPI は 12 であり，キャッシュミス時の CPI は 112 である．プログラムAを実行したところ，ICT21-MC-Cache は ICT21-MC と比較して性能が 1.5 倍であった．キャッシュヒット率は何%であるか，四捨五入して小数点以下 1 桁まで求めよ．

3) プロセッサのパイプライン処理について，以下の a) b) に答えよ．

a) パイプライン化されていないシングルサイクルプロセッサをN段にパイプライン化するとき，理想的には性能がN倍になると考えられる．その理由を述べよ．

b) 理想的な性能が達成できない理由の１つは「パイプラインハザード」と呼ばれる問題にある．パイプラインハザードは発生する原因によりいくつかの種類に分類できる．そのうちの１つを挙げ，その内容とともにパイプラインハザードについて説明せよ．