筆答専門試験科目（午前）　2024 大修
情報通信（数学）

時間　９：３０〜１１：００

注　意　事　項

1. 次の２題すべてに解答せよ．
2. 解答は１題ごとに１枚の答案用紙に記入せよ．必要であれば，答案用紙の裏面にも記入してよいが，答案用紙の表面にその旨を明記すること．
3. １枚の答案用紙に２題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある．また，１題の解答を２枚以上の答案用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある．
4. すべての答案用紙の試験科目名欄に「情報通信（数学）」と解答する問題番号を記入せよ．
5. すべての答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ．
6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない．
7. 導出過程も答案用紙に記入すること．

この空白ページは落丁および印刷ミスではありません

S1.

n を自然数，x, y を実変数として，以下の設問に答えよ．

1) 式 (S1.1) を用いて，式 (S1.2) の広義積分 I を無限級数で表すことを考える．この無限級数の第 n 項 a_n を求めよ．

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x| < 1) \tag{S1.1}$$

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{S1.2}$$

2) 式 (S1.2) の I を $(x, y) = (u - v, u + v)$ で変数変換をしたうえで，式 (S1.3) のように I_1, I_2 に分解する．ただし，式 (S1.3) は式 (S1.4)，(S1.5)，(S1.6) を満たす．このとき，下式の $A_1, B_1, C_1(u), A_2, B_2, C_2(u), D$ にあてはまる定数または関数をそれぞれ答えよ．ただし，$A_1 < A_2$ とする．

$$I = I_1 + I_2 \tag{S1.3}$$

$$I_1 = \int_{A_1}^{B_1} \left(\int_0^{C_1(u)} g(u, v) dv \right) du \tag{S1.4}$$

$$I_2 = \int_{A_2}^{B_2} \left(\int_0^{C_2(u)} g(u, v) dv \right) du \tag{S1.5}$$

$$g(u, v) = \frac{D}{1 - u^2 + v^2} \tag{S1.6}$$

3) 問 2) の I_1 の値を求めよ．必要ならば，式 (S1.7)，(S1.8) を用いてよい．

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{S1.7}$$

$$\frac{1}{1 - x^2 + y^2} = \frac{1}{(1 - x^2)\left(1 + \frac{y^2}{1-x^2}\right)} \qquad (|x| < 1) \tag{S1.8}$$

4) 問 2) の I_2 の値を求めよ．必要ならば，式 (S1.7)，(S1.8)，(S1.9) を用いてよい．

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2} \qquad (\sin x \neq 0) \tag{S1.9}$$

5) 式 (S1.2) の無限級数の和を求めよ．

S2. 実行列 $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ について以下の問に答えよ．ただし，$\mathbb{R}^3$ の内積とノルムは，標準内積とユークリッドノルムで考えよ．

1) $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ．

2) $\boldsymbol{A}$ の相異なる固有値の各々に対応する固有空間の正規直交基底を求めよ．

3) $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルで張られたベクトル空間の正規直交基底を求めよ．

4) 連立 1 次方程式

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{S2.1}$$

は解を持たない．連立方程式 (S2.1) の右辺に何らかのベクトル $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ を加えることによって，修正された連立方程式

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{e} \tag{S2.2}$$

が解を持つようにしたい．以下では，連立方程式 (S2.2) が解を持つとき，$\mathbf{e}$ は方程式 (S2.1) の「修正ベクトル」であるといい，方程式 (S2.1) のすべての修正ベクトルの中で最小のノルムを持つ修正ベクトルを方程式 (S2.1) の「最小ノルム修正ベクトル」とよぶことにする．方程式 (S2.1) の最小ノルム修正ベクトル $\mathbf{e}_{\min} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．

5) 方程式 (S2.1) の最小ノルム修正ベクトル $\mathbf{e}_{\min}$ を右辺に加えて修正された方程式

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{e}_{\min} \tag{S2.3}$$

の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ の中でノルムが最小となる解を求めよ．

筆答専門試験科目（午前）　2024 大修
情報通信（論述）

時間　１１：３０～１２：３０

注　意　事　項

1. 答案用紙のおもてだけに解答を記入せよ.
2. 答案用紙の試験科目名欄に「情報通信（論述）」を記入せよ.
3. 答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ.
4. 電子式卓上計算機等の使用は認めない.

この空白ページは落丁および印刷ミスではありません

R.

以下の問に答えよ．論理的かつ分かりやすい文章を心掛け，日本語または英語で記述すること．なお，図または表を答案全体で最低一つは用いること（図表の数に制限は設けないが，これらが紙面の半分以上を占めないようにすること）．

【問】

東京工業大学の情報通信系に関連する具体的な研究分野を一つ選び，以下の二点について答えよ．

1. その分野において過去に提案された重要と考えられる技術や理論を一つ挙げ，まずその重要性を論ぜよ．次に，その技術または理論を詳細に説明せよ．
2. その分野において重要と考えられる未解決の課題を一つ挙げ，その重要性と，解決に至ると思われるアプローチを論ぜよ．