筆答専門試験科目(午前)　2023 大修
経営工学

時間 10：00～11：00

注意事項

1. 筆答専門試験は，数理分野から 1 問，経済学分野から 1 問の計 2 問の問題から構成されている．

2. 数理分野の問題と経済学分野の問題のうち 1 つを選択して解答せよ． **両方の問題に解答した場合は，すべての解答を無効とする**．

3. 各分野の問題は，3 題の設問 ([1], [2], [3]) で構成されている．解答に当たっては，**設問**ごとに必ず**別々の解答用紙**を用いよ． 1 枚の解答用紙に 2 題以上の設問を解答した場合，採点されないことがある．

4. 各設問の解答において，1 枚の解答用紙では足りなくなった際には，2 枚以上を使ってよい．**裏面には記述しないこと**．

5. 各解答用紙には，**受験番号**，**分野名**（数理または経済学），および**設問番号** ([1], [2], [3]) を必ず記入せよ．

数理分野 (200 点)

次の設問 **[1]**，**[2]**，**[3]** のすべてに解答せよ．

[1] n は正整数とする．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W に対し，条件

$$\boldsymbol{x} \in W,\ \boldsymbol{y} \in W,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in W$$

が成り立つとき，W は部分空間であるという．以下の小問 (1) から (3) に答えよ．

(1) 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 V, W に対し，$V \cup W$ は部分空間になるとは限らない．このことについて，以下の問い (a), (b) に答えよ．

(a) そのような V, W の具体例を挙げよ．V, W の表現として，それらの正規直交基底を示すこと．ただし，そのような V, W の例が複数存在する場合は，V, W それぞれの正規直交基底に含まれるベクトルの数の和が最小のものを選ぶこととする．

(b) 問い (a) で挙げた V, W の具体例に対し，$V \cup W$ が部分空間にならないことを上記の部分空間の定義に基づいて証明せよ．

(2) 任意の非空な部分空間 V, W に対し，$V \cap W$ は非空であり，かつ部分空間になる．このことを，上記の部分空間の定義に基づいて証明せよ．

(3) 可算無限個の非空な部分空間 $W_1, W_2, \ldots$ に対し，それらの共通部分を $W = \cap_{i=1}^{\infty} W_i$ とする．W は，すべての W_i に含まれる部分空間の中で（包含関係に関して）最大であることを証明せよ．

[2] 以下の小問 (1) と (2) に答えよ．

(1) 実数の点列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 $\bar{x}$ がある（$\mathbb{N}$ は正整数の集合を表す）．このとき，次の (i) と (ii) を表す論理式を，下の候補群の中から幾つかを選び適切な順に並べることで記述せよ．この小問は答えだけ書けばよい．

(i) 点列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は実数 $\bar{x}$ に収束する．

(ii) 点列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は実数 $\bar{x}$ に収束しない．

候補群

$\forall n_0 \in \mathbb{N},\quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\quad \forall \epsilon > 0,\quad \exists \epsilon > 0,\quad \forall k \geq n_0,\quad \exists k \geq n_0,$

$|x_{n_0} - \bar{x}| < \epsilon,\quad |x_{n_0} - \bar{x}| \geq \epsilon,\quad |x_k - \bar{x}| < \epsilon,\quad |x_k - \bar{x}| \geq \epsilon$

(2) 以下の常微分方程式を解け．計算過程を明記すること．

$$\frac{dy}{dx} - (2x+1)y = 2xe^x$$

次ページにつづく

[3] 箱の中に赤色・青色・緑色の球がたくさん入っている．N 回の復元抽出をしたところ，赤色の球が N_R 回，青色の球が N_B 回，緑色の球が N_G 回取り出せた（$N = N_R + N_B + N_G$）．このとき，以下の手順によって赤色・青色・緑色の球それぞれが取り出される確率 P_R, P_B, P_G の最尤推定を行う．

(1) 上の事象の対数尤度を述べよ．

(2) $P_R + P_B + P_G = 1$ という制約の下で対数尤度を最大化する問題を考える．この問題のラグランジュ関数を述べよ．

(3) ラグランジュの未定乗数法により最尤推定量 $\hat{P}_R, \hat{P}_B, \hat{P}_G$ を求めよ．

経済学分野 (200 点)

次の設問 **[1]**，**[2]**，**[3]** のうち 2 つを選んで答えよ．各設問の配点は 100 点である．**3 つの設問に解答した場合は，すべての解答を無効とする．**

[1] 二人の経済主体（主体 1 と主体 2），一つの（純粋）公共財，一つの私的財から構成される経済を考える．主体 i の私的財の初期保有量を w_i，主体 i の私的財の消費量を $x_i (i = 1, 2)$，公共財の水準を y とする．公共財は私的財から生産可能で，生産関数は線型 $y = w_1 - x_1 + w_2 - x_2$ とする（公共財の初期保有量は $w_y = 0$ である）．また，各主体の効用関数が

$$u_1(x_1, y) = \ln x_1 + a_1 \ln y, \quad a_1 > 0$$
$$u_2(x_2, y) = x_2 + a_2 \ln y, \quad a_2 > 0$$

で与えられたとする．ここで，ln は自然対数である．以下では内点解の存在を仮定するものとし，小問 (1) から (6) に答えよ．答えの理由や計算プロセスも記載すること．

(1) 公共財供給の方法として，各主体 i が，公共財を生産するために自分の私的財から支払う量 $c_i = w_i - x_i$ を同時に選択する「自発的支払メカニズム」を考える $(i = 1, 2)$．自発的支払メカニズムのナッシュ均衡における配分 (x_1, x_2, y) を求めよ．

(2) 自発的支払メカニズムのナッシュ均衡配分がパレート効率（最適）か否かを示せ．

(3) リンダール均衡配分 (x_1, x_2, y) とリンダール均衡価格 (p_{y1}, p_{y2}) を求めよ．ただし，私的財の価格を 1，主体 i の公共財の価格を p_{yi} とする $(i = 1, 2)$．

(4) リンダール均衡配分がパレート効率（最適）か否かを示せ．

(5) $a_1 = 2, a_2 = 4, w_1 = 3, w_2 = 6$ とする．自発的支払メカニズムのナッシュ均衡を図示せよ．コルムの三角形，もしくは，横軸は x_1，縦軸は y を表す図と，横軸は x_2，縦軸は y を表す図に描くこと．

(6) $a_1 = 2, a_2 = 4, w_1 = 3, w_2 = 6$ とする．リンダール均衡を図示せよ．コルムの三角形，もしくは，横軸は x_1，縦軸は y を表す図と，横軸は x_2，縦軸は y を表す図に描くこと．

次ページにつづく

[2] 次の小問 (1) から (3) に答えよ．

(1) ある国の経済には $N(\geq 2)$ 種類の最終財がある．t 年の第 i 財の価格と生産量をそれぞれ P_t^i および Q_t^i とする．ただし，$t = 0, 1, 2, ...$ および $i = 1, 2, ..., N$ とする．以下の問い (a) から (d) に答えよ．

(a) t 年の名目 GDP を答えよ．

(b) 基準年を t_0 とする．t 年の実質 GDP を答えよ．

(c) 基準年 (t_0) から $t(> t_0)$ 年の物価変化を表すパーシェ指数とラスパイレス指数を答えよ．

(d) 第 i 財は基準年にはほとんど生産されておらず，$Q_{t_0}^i$ は 0 に近かった．そのため，その価格 $P_{t_0}^i$ は非常に高かった．ところが t 年に技術革新により第 i 財の生産量 Q_t^i が急増し，その価格 P_t^i が急落した．この結果，パーシェ指数とラスパイレス指数のどちらがより大きく変化すると考えられるか説明せよ．

(2) $t-1$ 期から t 期の実質利子率を r_t，名目利子率を i_t，またインフレ率を π_t とする．このときフィッシャー方程式は $r_t = i_t - \pi_t$ である．このフィッシャー方程式を以下の手順で導く．以下の問い (a) から (d) に答えよ．

(a) いま X 円の資金がある．$t-1$ 期のお米 1kg の価格を P_{t-1} 円とする．$t-1$ 期には X 円で何 kg のお米が購入できるか答えよ．

(b) $t-1$ 期にお米を買わずに X 円の預金をする．t 期に得る元利合計の所得で t 期には何 kg のお米が購入できるか答えよ．ただし，t 期のお米 1kg の価格を P_t 円とする．

(c) $t-1$ 期にお米を購入する場合に比べて，預金した場合は，t 期に購入できるお米の量 (kg) は何倍になるか答えよ．

(d) 問い (c) で答えた値が $1 + r_t$ に等しい．フィッシャー方程式を導け．インフレ率は $\pi_t = (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$ である．ただし，π_t と i_t は十分に 0 に近く，$\pi_t i_t = 0$ および $1/(1 + \pi_t) = 1 - \pi_t$ と近似してよい．

(3) ソローの経済成長モデルを考える．t 期の資本ストックを K_t，労働人口を L_t とする．ただし，$t = 0, 1, 2, ...$ とする．t 期の最終財の生産は $Y_t = K_t^a L_t^{1-a}$ である．$a \in (0, 1)$ である．貯蓄率を $s \in (0, 1)$，資本減耗率を $\delta \in (0, 1)$，労働人口の成長率を $n > -1$ とする．$n + \delta > 0$ である．t 期の「労働一単位当たりの資本ストック」を $k_t = K_t/L_t$ とする．定常状態の「労働一単位当たりの消費水準」を最大にする貯蓄率を答えよ．理由および導出過程も記すこと．

次ページにつづく

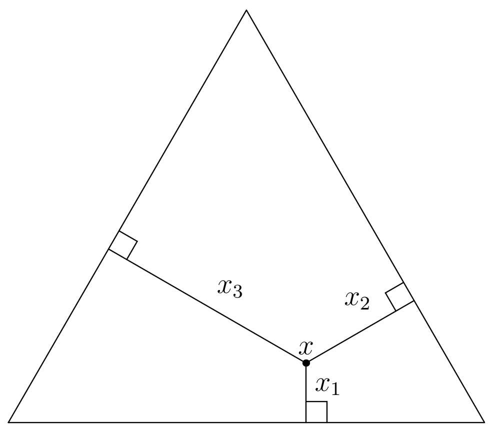
[3] プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, 3\}$ とし，特性関数 v を以下のように定義する．ただし，α は実数とし，特性関数形ゲーム (N, v) は優加法性を満たすと仮定する．

$$v(\{1,2,3\}) = 10,$$
$$v(\{1,2\}) = \alpha, \quad v(\{1,3\}) = 5, \quad v(\{2,3\}) = 7,$$
$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, \qquad v(\emptyset) = 0.$$

このとき，以下の小問 (1) から (4) に答えよ．

(1) 特性関数形ゲーム (N, v) が優加法性を満たすための α に関する必要十分条件を導出せよ．また，その導出過程も記すこと．

(2) $\alpha = 6$ のとき，特性関数形ゲーム (N, v) のコアを数式で表せ．また，$x = (x_1, x_2, x_3)$ の値を表す高さが 10 である正三角形にコアを図示せよ．ただし，正三角形の内部の点から底辺に下ろした垂線の長さを x_1，右辺に下ろした垂線の長さを x_2，左辺に下ろした垂線の長さを x_3 とする（下図参照）．コアが空集合の場合は「空集合」と書くこと．



(3) 特性関数形ゲーム (N, v) のシャープレイ値を $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ とする．以下の条件 (i) から (iii) それぞれに対し，それを満たす α の値を挙げよ．そのような α が存在しない場合は「存在しない」と書くこと．

(i) $\phi_1 = \phi_2$

(ii) $\phi_1 = \phi_3$

(iii) $\phi_2 = \phi_3$

(4) $\alpha = 8$ のとき，特性関数形ゲーム (N, v) の仁を求めよ．また，その導出過程も記すこと．