専門科目 (午前)　　31　大修

数理・計算科学

Mathematical and Computing Science

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

Time 9:30AM – 1:00PM

注意事項

1. 問 A, 問 B, 問 C より 2 問を選択し解答せよ.
2. 問 1～問 9 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

Instruction

1. Solve 2 problems out of Problems A, B, and C.
2. Solve 3 problems out of Problems 1 to 9.
3. Note that if you solved more problems than specified above, problems you solved might not be scored.
4. Write the problem number and your examinee number in each answer sheet.
5. Use one answer sheet per problem.
6. You may use the other side of the answer sheet, but in that case you should indicate that, for example, by writing “continue to the other side.”

問 A

n を 2 以上の整数とする．n 次実対称行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は異なる固有値 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ をもつとし，λ_i の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n$ とする．ただし $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ のユークリッドノルムは 1 とする．以下の問に答えよ．

(1) $i \neq j$ なら $\boldsymbol{x}_i$ と $\boldsymbol{x}_j$ は直交することを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{O} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を n 次零行列とし，$2n$ 次実対称行列 $\boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

と定める．$\boldsymbol{B}$ の $2n$ 個の固有ベクトルを一組求めよ．ただし各固有ベクトルのユークリッドノルムは 1 とし，異なる固有ベクトルは互いに直交するように選べ．

(3) 行列 $\boldsymbol{B}$ について，異なる固有値の個数の最小値を求めよ．また最小値を達成するとき，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ が満たすべき条件を求めよ．

Problem A

Let n be an integer greater than or equal to 2. Assume that an $n \times n$ real symmetric matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ has distinct eigenvalues, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$. Define $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n$ as an eigenvector corresponding to the eigenvalue λ_i, where the Euclidean norms of $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ are one. Answer the following questions.

(1) Show that $\boldsymbol{x}_i$ and $\boldsymbol{x}_j$ are orthogonal for $i \neq j$.

(2) For the $n \times n$ null matrix $\boldsymbol{O} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, let us define a $2n \times 2n$ real symmetric matrix $\boldsymbol{B}$ by

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

Find a set of $2n$ eigenvectors of $\boldsymbol{B}$ so that the Euclidean norm of each eigenvector is one and different eigenvectors are orthogonal to each other.

(3) Find the minimum number of distinct eigenvalues of $\boldsymbol{B}$. In addition, determine the condition that $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ should satisfy when the number of distinct eigenvalues of $\boldsymbol{B}$ is minimum.

問 B

以下の問いに答えよ．ただし必要ならば $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることは証明なしで使ってよい．

(1) $s > 0$ に対し，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ が収束することを示せ．

(2) $s > 0$ に対し，ガンマ関数 $\Gamma(s)$ を $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ と定める．このとき $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を示せ．

(3) ガンマ関数 $\Gamma(s)$ の $s = \dfrac{3}{2}$ での値 $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)$ を求めよ．

Problem B

Answer the following questions. Here the fact that $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ can be used without the proof, if necessary.

(1) Show that the improper integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ converges for $s > 0$.

(2) Define the gamma function $\Gamma(s)$ by $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ for $s > 0$. Show that $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ holds.

(3) Derive $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, namely, the value of the gamma function $\Gamma(s)$ at $s = \frac{3}{2}$.

問 C

配列 d[0], d[1], ..., d[$n-1$] には n 個の相異なる整数が昇順で入っているとする．二分探索アルゴリズムを記述した次の擬似コードを **BinSearch** と呼ぶ．

```
def search(k, a, b)          # a ≦ i ≦ b かつ d[i] = k となる i を返す.
                             # そのような i が無い場合は -1 を返す.

  i := a + ((b - a) / 2)     # ☆
  if (d[i] == k)
    return i
  else if ((k < d[i]) && (a < i))
    return search(k, a, i-1)
  else if ((d[i] < k) && (i < b))
    return search(k, i+1, b)
  else
    return -1
  end
end
```

ただし ☆ の行中の / は切り捨てで商を求める演算である．与えられた整数 k に対して search(k,0,$n-1$) を実行すると，d[i] $= k$ となる i が存在する場合はその i が返され，存在しない場合は -1 が返される．search(k,0,$n-1$) の計算の中で ☆ の行が実行される総回数（つまり search が呼び出される総回数）を steps(k,n) と表記する．たとえば配列 d が {30,50} のとき steps$(30,2)=1$ であり（なぜなら search(30,0,1) だけが呼び出される）steps$(40,2)=2$ である（なぜなら search(40,0,1) と search(40,1,1) が呼び出される）．max_steps$(n) = \max_{k\in\mathbb{Z}}($steps$(k,n))$ と定義する．これはこのアルゴリズムで n 個の要素の中から探索をする際の最悪ステップ数である．max_steps(n) の値は n にだけ依存して d[0], d[1], ..., d[$n-1$] の値には依存しない．

(1) max_steps(15) の値を書け．

(2) ☆ の行の代入文を

```
i := a + ((b - a) / 1)
```

（これは i := b に等しい）に変更した擬似コードを **UniSearch** と呼ぶ．**UniSearch** における max_steps(10) の値を書け．さらに配列 d が {0,2,4,6,8,10,12,14,16,18} のとき，steps$(k,10)$ = max_steps(10) となる k の値をひとつ書け．

(3) ☆ の行の代入文を

```
i := a + ((b - a) / 10)
```

に変更した擬似コードを **DecSearch** と呼ぶ．**DecSearch** における max_steps(10) の値を書け．さらに配列 d が上記と同じとき，steps$(k,10)$ = max_steps(10) となる k の値をひとつ書け．

(4) 3 つの関数 bin, uni, dec を次のように定義する．

（次ページへ続く）

$\mathsf{bin}(n) = \textbf{BinSearch}$ における $\mathsf{max\_steps}(n)$.
$\mathsf{uni}(n) = \textbf{UniSearch}$ における $\mathsf{max\_steps}(n)$.
$\mathsf{dec}(n) = \textbf{DecSearch}$ における $\mathsf{max\_steps}(n)$.

これらそれぞれの関数をオーダー記法 $O(\cdot)$ で表せ．さらにそれを求めた根拠を簡潔に説明せよ．

(5) 次の $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$ に入る正しい語句を「よりも真に大きい」「よりも真に小さい」「と等しい」の中からそれぞれ選べ。

- $\mathsf{bin}(n)$ のオーダーは $\mathsf{uni}(n)$ のオーダー $\boxed{\quad\mathrm{A}\quad}$.
- $\mathsf{bin}(n)$ のオーダーは $\mathsf{dec}(n)$ のオーダー $\boxed{\quad\mathrm{B}\quad}$.
- $\mathsf{uni}(n)$ のオーダーは $\mathsf{dec}(n)$ のオーダー $\boxed{\quad\mathrm{C}\quad}$.

Problem C

Assume that the array `d[0]`, `d[1]`, ..., `d[`$n-1$`]` contains n distinct integers in ascending order. The following pseudo-code, which describes the binary search algorithm, is called **BinSearch**.

```
def search(k, a, b)      # returns i such that a ≦ i ≦ b and d[i]=k.
                         # returns -1 if there is no such i.

  i := a + ((b - a) / 2)   # ☆
  if (d[i] == k)
    return i
  else if ((k < d[i]) && (a < i))
    return search(k, a, i-1)
  else if ((d[i] < k) && (i < b))
    return search(k, i+1, b)
  else
    return -1
  end
end
```

Note that the symbol `/` in the statement ☆ denotes the operator to divide and round down. Given an integer k, the execution of `search(`k`,0,`n–1`)` gives the integer i such that `d[`i`]` $= k$ if such i exists; otherwise it gives -1. By $\mathsf{steps}(k, n)$, we mean the total number of executions of the statement ☆ during the invocation of `search(`k`,0,`n–1`)` (i.e., the total number of calls to `search`). For example, if the array `d` is `{30,50}`, then $\mathsf{steps}(30, 2) = 1$ (because only `search(30,0,1)` is invoked) and $\mathsf{steps}(40, 2) = 2$ (because `search(40,0,1)` and `search(40,1,1)` are invoked). We define $\mathsf{max\_steps}(n) = \max_{k\in\mathbb{Z}}(\mathsf{steps}(k, n))$, that is, the worst-case number of steps for searching among n elements by this algorithm. The value of $\mathsf{max\_steps}(n)$ depends only on n and does not depend on the values of `d[0]`, `d[1]`, ..., `d[`$n-1$`]`.

(1) Find the value of $\mathsf{max\_steps}(15)$.

(2) Let **UniSearch** be the pseudo-code which is obtained by replacing the statement ☆ with

```
i := a + ((b - a) / 1)
```

(this statement is equivalent to `i := b`). Find the value of $\mathsf{max\_steps}(10)$ for **UniSearch**. Additionally, suppose the array `d` is `{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18}`; then find an integer k such that $\mathsf{steps}(k, 10) = \mathsf{max\_steps}(10)$.

(3) Let **DecSearch** be the pseudo-code which is obtained by replacing the statement ☆ with

```
i := a + ((b - a) / 10).
```

Find the value of $\mathsf{max\_steps}(10)$ for **DecSearch**. Additionally, find an integer k such that $\mathsf{steps}(k, 10) = \mathsf{max\_steps}(10)$ provided that the array `d` is the same as above.

(4) Define three functions bin, uni, and dec as follows.

(Continued on the next page)

$\mathsf{bin}(n) = \mathsf{max\_steps}(n)$ for **BinSearch**.
$\mathsf{uni}(n) = \mathsf{max\_steps}(n)$ for **UniSearch**.
$\mathsf{dec}(n) = \mathsf{max\_steps}(n)$ for **DecSearch**.

Write the order of each function using the $O(\cdot)$ notation, and explain briefly the reason for your answer.

(5) Consider the following sentences.

- The order of $\mathsf{bin}(n)$ is $\boxed{\quad A \quad}$ the order of $\mathsf{uni}(n)$.
- The order of $\mathsf{bin}(n)$ is $\boxed{\quad B \quad}$ the order of $\mathsf{dec}(n)$.
- The order of $\mathsf{uni}(n)$ is $\boxed{\quad C \quad}$ the order of $\mathsf{dec}(n)$.

Fill in the blanks $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, and $\boxed{C}$ with appropriate phrases given below.

- strictly greater than
- strictly less than
- equal to

問 1

複素数体の部分環 $R = \{x + y\sqrt{-3}\,;\, x, y \in \mathbb{Z}\}$ について以下の問いに答えよ．

(1) R の可逆元 (単元ともいう) をすべて求めよ．

(2) 素数 7 は

$$7 = (2 + \sqrt{-3})(2 - \sqrt{-3})$$

のように環 R の可逆元でない 2 つの元の積に分解できる．同様に素数 13 を環 R の可逆元でない 2 つの元の積に分解せよ．

(3) 素数 p が環 R の可逆元でない 2 つの元の積に分解できるならば，ある $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在して $p = x^2 + 3y^2$ と書けることを示せ．

Problem 1

Consider $R = \{x + y\sqrt{-3}\,;\ x, y \in \mathbb{Z}\}$, which is a subring of the field of complex numbers. Answer the following questions.

(1) Determine all invertible elements of R.

(2) Note that the prime number 7 can be decomposed into a product of two non-invertible elements of R:

$$7 = (2 + \sqrt{-3})(2 - \sqrt{-3}).$$

Similarly, express the prime number 13 as a product of two non-invertible elements of R.

(3) Show that if a prime number p is a product of two non-invertible elements of R, then there exist $x, y \in \mathbb{Z}$ such that $p = x^2 + 3y^2$.

問 2

1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ 上の通常の位相 $\mathcal{U}$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の部分集合族 $\mathcal{U}^*$ を

$$\mathcal{U}^* = \{G \subset \mathbb{R};\ \mathbb{R} \setminus G \text{ が位相空間 } (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \text{ におけるコンパクト集合}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

で定める．ただし $\emptyset$ は空集合を表す．このとき以下の問いに答えよ．必要ならばユークリッド空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ におけるコンパクト集合の諸性質を証明なしに用いてよい．

(1) $\mathcal{U}^*$ は開集合系として $\mathbb{R}$ 上に位相を定めることを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ の部分集合 G に関する次の命題を示せ．

G が位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{U}^*)$ の開集合であるならば G は位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ の開集合である．

また，逆が成立するか否かを理由をつけて述べよ．

(3) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{U}^*)$ がハウスドルフ空間であるか否かを理由をつけて述べよ．

Problem 2

Let $\mathcal{U}$ be the usual topology for the 1-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}$. Let

$$\mathcal{U}^* = \{G \subset \mathbb{R};\ \mathbb{R} \setminus G \text{ is a compact set in the topological space } (\mathbb{R}, \mathcal{U})\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

be a family of subsets of $\mathbb{R}$, where $\emptyset$ is the empty set. Answer the following questions. If necessary, properties of compact sets in the Euclidean space $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ can be used without proofs.

(1) Show that $\mathcal{U}^*$ gives a topology of $\mathbb{R}$, as a family of open sets.

(2) Let G be a subset of $\mathbb{R}$. Show the following proposition:

If G is an open set in $(\mathbb{R}, \mathcal{U}^*)$, then G is an open set in $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$.

In addition, determine and explain whether the converse is true or false.

(3) Determine and explain whether $(\mathbb{R}, \mathcal{U}^*)$ is a Hausdorff space or not.

問 3

区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体のなす線形空間 $C[0,1]$ に対して，ノルム

$$\|x\| = \max\{|x(t)|\,;\ 0 \leq t \leq 1\}$$

を導入したノルム空間を X とおき，X の部分空間 Y を

$$Y = \{x \in C^1[0,1]\,;\ x(0) = 0\}$$

と定める．ただし $C^1[0,1]$ は $[0,1]$ 上の 1 階連続的微分可能な実数値関数全体を表す．また作用素 T を

$$T: \quad x \ \mapsto \ Tx = \frac{dx}{dt}$$

で定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) T は Y から X への上への 1 対 1 の線形作用素となることを示せ．

(2) 逆作用素 T^{-1} が X から Y への有界線形作用素であることを示せ．

(3) T は Y から X への有界線形作用素にならないことを示せ．

Problem 3

Let X be a normed space of real continuous functions over the interval $[0,1]$ with the norm

$$\|x\| = \max\{|x(t)|\,;\ 0 \le t \le 1\},$$

and let Y be a subspace of X defined by

$$Y = \{x \in C^1[0,1]\,;\ x(0) = 0\}.$$

Here $C^1[0,1]$ denotes the set of real continuously differentiable functions over $[0,1]$. Consider an operator T defined by

$$T: \quad x \;\mapsto\; Tx = \frac{dx}{dt}.$$

Answer the following questions.

(1) Show that T is a one to one and onto linear operator from Y to X.

(2) Show that the inverse operator T^{-1} is a bounded linear operator from X to Y.

(3) Show that T is not a bounded linear operator from Y to X.

問 4

次の線形計画問題 $\mathcal{P}$ を考える：

$$
\mathcal{P} \ : \ \begin{array}{lcrcl} \text{最大化} & : & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & & \\ \text{制約} & : & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}. \end{array}
$$

ただし，$\mathcal{P}$ の変数は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ であり，入力は $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ である．また，上付き添え字 T はベクトルまたは行列の転置を表し，$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の各要素が非負であることを示す.

(1) $\mathcal{P}$ の双対問題 $\mathcal{D}$ を書け．ただし，$\mathcal{D}$ の変数は $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ とする．

(2) $\mathcal{P}$ と $\mathcal{D}$ が実行可能であると仮定し，$\bar{\boldsymbol{x}}$ と $\bar{\boldsymbol{y}}$ をそれぞれ $\mathcal{P}$ と $\mathcal{D}$ の実行可能解とする．このとき，$\boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}^T\bar{\boldsymbol{y}}$ を示せ.（つまり，弱双対定理を示せ.）

(3) 以下の入力のときの $\mathcal{P}$ の最適解と最適値を求めよ．

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Problem 4

Consider a linear programming problem $\mathcal{P}$ defined by:

$$\mathcal{P} \;:\; \begin{array}{rcrcl} \text{maximize} & : & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & & \\ \text{subject to} & : & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}. \end{array}$$

In $\mathcal{P}$, the variable vector is $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ and the input data are $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, and $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. The superscript T denotes the transpose of a vector or a matrix, and $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ indicates that each element of $\boldsymbol{x}$ is nonnegative.

(1) Let $\mathcal{D}$ be the dual problem of $\mathcal{P}$. Write down $\mathcal{D}$ using $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ as its variable vector.

(2) Assume that $\mathcal{P}$ and $\mathcal{D}$ are feasible. Let $\bar{\boldsymbol{x}}$ and $\bar{\boldsymbol{y}}$ be feasible solutions of $\mathcal{P}$ and $\mathcal{D}$, respectively. Prove the inequality $\boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}^T\bar{\boldsymbol{y}}$. (In other words, prove the weak duality theorem.)

(3) Assume that the input data of $\mathcal{P}$ are given as follows:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Compute an optimal solution and the optimal value of $\mathcal{P}$.

問 5

μ を正の実数，f を $f(x)=0$ $(x<0)$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の確率密度関数として，次の 2 つの命題 (A), (B) を考える．

(A) $f(x)=\mu\,\mathrm{e}^{-\mu x}$ $(x\geq 0)$.

(B) X を確率密度関数 f をもつ確率変数とする．このとき，$g(0)=0$ を満たし，$[0,\infty)$ 上で連続かつ区分的に連続的微分可能な任意の実数値関数 g に対して，$\mathsf{E}[|g(X)|]<\infty$ かつ $\mathsf{E}[|g'(X)|]<\infty$ であれば

$$\mathsf{E}[g'(X)]=\mu\,\mathsf{E}[g(X)]$$

が成り立つ．ここで E は期待値を表し，g' は g の導関数を表す．

(1) (A) ならば (B) が成り立つことを示せ．

(2) 関数 g を次のように定めることによって (B) ならば (A) が成り立つことを示せ．

任意に与えた $a\geq 0$, $h>0$ に対して $g(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{h}, & a\leq x<a+h,\\ 1, & x\geq a+h.\end{cases}$

Problem 5

Let μ denote a positive real number and let f denote a probability density function on $\mathbb{R}$ satisfying $f(x) = 0$ for $x < 0$. Consider the following two propositions (A) and (B).

(A) $f(x) = \mu\, \mathrm{e}^{-\mu x}$ for $x \geq 0$.

(B) Let X denote a random variable with the probability density function f. For any real-valued function g with $g(0) = 0$ such that it is continuous and piecewise continuously differentiable on $[0, \infty)$, it holds that

$$\mathsf{E}[g'(X)] = \mu\, \mathsf{E}[g(X)],$$

provided that $\mathsf{E}[|g(X)|] < \infty$ and $\mathsf{E}[|g'(X)|] < \infty$. Here, E represents the expectation and g' denotes the derivative of g.

(1) Derive (B) from (A).

(2) Derive (A) from (B) by determining the function g as follows.

For any given $a \geq 0$, $h > 0$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{h}, & a \leq x < a+h, \\ 1, & x \geq a+h. \end{cases}$

問 6

区間 $[0, \theta]$ 上の一様分布から n 個のデータ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立に得られている．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ のうちの最大値を Z と表すとき，以下の問に答えよ．

(1) データセット $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対する θ の尤度を答えよ．

(2) θ の最尤推定量 T_n を求めよ．

(3) T_n の期待値，および，分散を求めよ．

(4) $0 \leq \beta \leq 1$，$0 \leq \gamma \leq 1$ に対し，$\Pr(0 \leq T_n < b) = \beta$，$\Pr(c < T_n \leq \theta) = \gamma$ となる $b \in [0, \theta]$，$c \in [0, \theta]$ を求めよ．

(5) $0 < \alpha < 1$ に対し，θ の $100(1-\alpha)$%信頼区間 $[k_1 T_n, k_2 T_n]$ を設定する．$k_2 - k_1$ が最小になるように k_1，k_2 を定めよ．

Problem 6

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be n data independently sampled from the uniform distribution on $[0, \theta]$. We denote the maximum value of $X_1, X_2, \ldots, X_n$ by Z.

(1) Answer the likelihood of θ for the data set $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

(2) Find the maximum likelihood estimator T_n of θ.

(3) Compute the expectation and variance of T_n.

(4) For $0 \leq \beta \leq 1$ and $0 \leq \gamma \leq 1$, find $b \in [0, \theta]$ and $c \in [0, \theta]$ such that $\Pr(0 \leq T_n < b) = \beta$ and $\Pr(c < T_n \leq \theta) = \gamma$ hold.

(5) For $0 < \alpha < 1$, we construct a $100(1-\alpha)\%$ confidence interval $[k_1 T_n, k_2 T_n]$ of θ. Determine k_1 and k_2 so that $k_2 - k_1$ is minimized.

問 7

アルファベットを $\{\texttt{0},\texttt{1}\}$ とし，二つの言語

$$L_1 = \{w \mid w \text{ は部分文字列 } \texttt{01} \text{ と } \texttt{00} \text{ を同じ個数含む } \}$$

$$L_2 = \{w \mid w \text{ は部分文字列 } \texttt{01} \text{ と } \texttt{10} \text{ を同じ個数含む } \}$$

を考える．例えば，

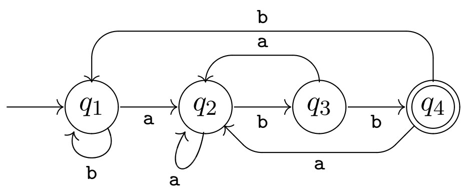
- $s_1 = \texttt{00011}$ は 01 を 1 つと 00 を 2 つ含むので $s_1 \notin L_1$ である．
- $s_2 = \texttt{0100}$ は 01 と 00 を 1 つずつ含むので $s_2 \in L_1$ である．
- s_1 は 01 を 1 つ含むが 10 を 1 つも含まないので $s_1 \notin L_2$ である．
- s_2 は 01 と 10 を 1 つずつ含むので $s_2 \in L_2$ である．

次の問いに答えよ．

(1) 言語 L_1 は正規であるか否か．正規であるならば，言語 L_1 を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 1) を与え，正規でないならば，言語 L_1 が正規でないことをポンピング補題 (注 2) を用いて証明せよ．

(2) 言語 L_2 は正規であるか否か．(1) と同様に答えよ．

注 1: 状態遷移図
以下は，アルファベットが $\{\texttt{a},\texttt{b}\}$ であるような言語 $\{w \mid w \text{ は } \texttt{abb} \text{ で終わる } \}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態は q_4 である．



注 2: ポンピング補題
言語 L が正規言語であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

> s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割できる:
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
> 2. $|y| > 0$
> 3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 回連結したものを表わす．y^0 は空列 ε (文字を 1 つも含まない文字列) となる．

Problem 7

Let the alphabet be $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. Consider the following two languages.

$$L_1 = \{w \mid w \text{ includes the same number of substrings } \mathtt{01} \text{ and } \mathtt{00}\}.$$

$$L_2 = \{w \mid w \text{ includes the same number of substrings } \mathtt{01} \text{ and } \mathtt{10}\}.$$

For example,

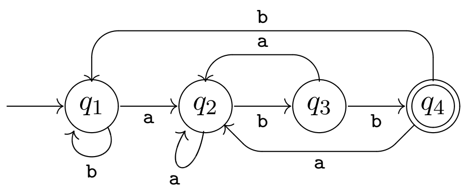
- $s_1 = \mathtt{00011}$ includes one `01` and two `00`'s, so $s_1 \notin L_1$.
- $s_2 = \mathtt{0100}$ includes one `01` and one `00`, so $s_2 \in L_1$.
- s_1 includes one `01` but no `10`, so $s_1 \notin L_2$.
- s_2 includes one `01` and one `10`, so $s_2 \in L_2$.

Answer the following questions.

(1) Is the language L_1 regular, or not? If it is regular, give a state transition diagram of a deterministic finite automaton (Note 1) that recognizes it. If not, prove this fact by using the pumping lemma (Note 2).

(2) Is the language L_2 regular, or not? Answer this in a similar way to (1).

Note 1: State transition diagram
The following diagram is an example of a state transition diagram of a deterministic finite automaton that recognizes the language $\{w \mid w \text{ ends with } \mathtt{abb}\}$ where the alphabet is $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. The start state is q_1, and an accept state is q_4.



Note 2: The pumping lemma
If L is a regular language, then there exists a number p (the pumping length) such that

> if s is any string in L such that $|s| \geq p$, then s can be divided into three pieces, $s = xyz$, satisfying the following conditions:
>
> 1. for each $i \geq 0$, $xy^iz \in L$,
> 2. $|y| > 0$, and
> 3. $|xy| \leq p$,

where $|s|$ represents the length of the string s, y^i means that i copies of y are concatenated together, and y^0 equals the empty string ε (the string with length zero).

問 8

数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を入力とし，その長さ 1 以上の連続する部分数列 $a_s, a_{s+1}, \ldots, a_t$ の和の最大値を出力とする動的計画法のアルゴリズム A を設計したい．

(1) 補助関数 f を

$$f(0) := -\infty$$
$$f(t) := \max_{1 \le s \le t} \sum_{x=s}^{t} a_x, \qquad 1 \le t \le n$$

と定義するとき，$f(m+1)$ を $f(m)$ を用いて表せ．ここで，m は $0 \le m \le n-1$ を満たす整数とする．

(2) (1) で示した関係式を用いた動的計画法のアルゴリズム A を擬似コードを用いて示せ．

(3) (2) で示したアルゴリズムの時間計算量をオーダー記法 $O(\cdot)$ を用いて示せ．ただし，数の四則演算と比較は定数時間でできるものとする．

数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を入力とし，$\max_{1 \le s \le u < w \le t \le n} \left\{ \left(\sum_{x=s}^{u} a_x\right) + \left(\sum_{x=w}^{t} a_x\right) \right\}$ を出力とする動的計画法のアルゴリズム B を設計したい．

(4) 補助関数 f, g, h を

$$f(0) := -\infty, \qquad g(0) := -\infty, \qquad h(0) := -\infty, \qquad h(1) := -\infty,$$
$$f(t) := \max_{1 \le s \le t} \sum_{x=s}^{t} a_x, \qquad 1 \le t \le n$$
$$g(t) := \max_{1 \le s \le u \le t} \sum_{x=s}^{u} a_x, \qquad 1 \le t \le n$$
$$h(t) := \max_{1 \le s \le u < w \le t} \left\{ \left(\sum_{x=s}^{u} a_x \right) + \left(\sum_{x=w}^{t} a_x \right) \right\}, \qquad 2 \le t \le n$$

と定義するとき，$f(m+1)$, $g(m+1)$, $h(m+1)$, $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$ の間に成り立つ，動的計画法のアルゴリズム B を設計するために必要な関係式をすべて示せ．ここで，m は $0 \le m \le n-1$ を満たす整数とする．

Problem 8

We consider a dynamic programming algorithm A that takes a sequence $a_1, \ldots, a_n$ of numbers as an input and outputs the largest sum of a contiguous subsequence $a_s, a_{s+1}, \ldots, a_t$ of length at least one.

(1) Let us define an auxiliary function f by

$$
\begin{aligned}
f(0) &:= -\infty \\
f(t) &:= \max_{1 \le s \le t} \sum_{x=s}^{t} a_x, \qquad 1 \le t \le n.
\end{aligned}
$$

Show a representation of $f(m+1)$ by using $f(m)$ where m is an integer satisfying $0 \le m \le n-1$.

(2) Show pseudo-code of the dynamic programming algorithm A using the formula obtained in (1).

(3) Show the time-complexity of the algorithm shown in (2) by using the $O(\cdot)$ notation. We assume that the arithmetic operations and the comparison operations of numbers take constant time.

We consider a dynamic programming algorithm B that takes a sequence $a_1, \ldots, a_n$ of numbers as an input and outputs $\max_{1 \le s \le u < w \le t \le n} \left\{ (\sum_{x=s}^{u} a_x) + \left(\sum_{x=w}^{t} a_x\right) \right\}$.

(4) Let us define auxiliary functions f, g and h by

$$
\begin{aligned}
&f(0) := -\infty, \qquad g(0) := -\infty, \qquad h(0) := -\infty, \qquad h(1) := -\infty, \\
&f(t) := \max_{1 \le s \le t} \sum_{x=s}^{t} a_x, \qquad 1 \le t \le n \\
&g(t) := \max_{1 \le s \le u \le t} \sum_{x=s}^{u} a_x, \qquad 1 \le t \le n \\
&h(t) := \max_{1 \le s \le u < w \le t} \left\{ \left(\sum_{x=s}^{u} a_x \right) + \left(\sum_{x=w}^{t} a_x \right) \right\}, \qquad 2 \le t \le n.
\end{aligned}
$$

Show all required formulas among $f(m+1), g(m+1), h(m+1), f(m), g(m)$ and $h(m)$ for designing the dynamic programming algorithm B where m is an integer satisfying $0 \le m \le n-1$.

問 9

葉以外のノードは全て 2 つの子を持ち，葉には正の整数値が割り当てられている二分木について以下の問いに答えよ．二分木に関する情報はノードの ID を引数とする以下の関数で得るものとする．ただし ID は非負の整数である．以降では ID が i であるノードを「ノード i」，ノード i を根とする木を「木 i」と呼ぶ．

`L(`i`)`	ノード i が葉でなかった場合，左の子ノードの ID を返す
`R(`i`)`	ノード i が葉でなかった場合，右の子ノードの ID を返す
`V(`i`)`	ノード i が葉であった場合，割り当てられた整数値を返す．そうでなかった場合，-1 を返す

(1) 木 i と木 j の等しさを `true`/`false` で返す再帰関数 `eq(`i,j`)` を擬似コードとして示せ．ただし 2 つの木 i, j が等しいとは，ノードの配置が同じであり，同じ位置にある葉どうしが等しい値を割り当てられていることをいう．

(2) 以下の擬似コード `tr(`i`)` は木 i の葉に割り当てられた整数値を左から順に印刷して正常終了する．この関数を再帰呼び出しを使わずに `while` 文による繰り返しを用いて書き直せ．

```
def tr(i)
  if V(i) == -1
    tr(L(i))
    tr(R(i))
  else
    print V(i)
  end
end
```

ただし整数値のスタックが以下の関数を用いて利用できるものとする．スタックは 1 つだけあり，初期状態は空だとする．

`E()`	スタックが空の場合は `true`，空でない場合は `false` を返す
`U(`v`)`	スタックに整数値 v を 1 個追加する
`O()`	スタックから整数値 v を 1 個取り除き，v を返す

(3) 関数 `eq(`i,j`)` を再帰呼び出しを用いずに `while` 文による繰り返しを用いて書き直せ．上述のスタックを用いてよい．

Problem 9

Answer the following questions about binary trees, each of whose non-leaf nodes has two children, and each of whose leaf nodes is associated with a positive integer value. The following functions, which take a node ID as an argument, provide information of binary trees. Every node ID is a non-negative integer. We hereafter refer to a node that has ID i as "node i", and a tree whose root node has ID i as "tree i".

`L(`i`)`	When node i is not a leaf node, it returns the ID of the left child node of the node i.
`R(`i`)`	When node i is not a leaf node, it returns the ID of the right child node of the node i.
`V(`i`)`	When node i is a leaf node, it returns the associated value. Otherwise, it returns -1.

(1) Write pseudo-code of a recursive function `eq(`i`,`j`)` that returns equality of tree i and tree j as `true` or `false`. Trees i and j are equal when they have the same node arrangements, and each pair of leaves at the same position is associated with the same value.

(2) The following pseudo-code `tr(`i`)` prints the associated values of the leaves in tree i in the left-to-right order, and terminates normally. Rewrite the function using one or more `while` statements, without using recursion.

```
def tr(i)
  if V(i) == -1
    tr(L(i))
    tr(R(i))
  else
    print V(i)
  end
end
```

You may use a stack of integer values by calling the following functions. There is only one stack, which is initially empty.

`E()`	When the stack is empty, it returns `true`. Otherwise, it returns `false`.
`U(`v`)`	It pushes an integer value v to the stack.
`O()`	It removes an integer value v from the stack, and returns v.

(3) Rewrite the function `eq(`i`,`j`)` using one or more `while` statements, without using recursion. You may use the stack introduced above.