専門科目 (午前) **2020 大修**

数理・計算科学 **時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時**

Mathematical and Computing Science **Time 9:30AM – 1:00PM**

注意事項

1. 問 A, 問 B, 問 C より 2 問を選択し解答せよ.
2. 問 1〜問 9 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

Instruction

1. Solve 2 problems out of Problems A, B, and C.
2. Solve 3 problems out of Problems 1 to 9.
3. Note that if you solved more problems than specified above, problems you solved might not be scored.
4. Write the problem number and your examinee number in each answer sheet.
5. Use one answer sheet per problem.
6. You may use the other side of the answer sheet, but in that case you should indicate that, for example, by writing “continue to the other side.”

問 A

$n \times n$ 実行列 $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ に対して，階数 (rank) に関する以下の (A) から (C) の等式について考える ($n \geq 1$)．ただし，$\boldsymbol{R}^\top$ は行列 $\boldsymbol{R}$ の転置行列を表すとする．

(A) $\mathrm{rank}[\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}] = n$.

(B) $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} = n$.

(C) $\mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{Q}] = n$.

以下の問に答えよ．

(1) (A) が成り立つならば，(B) も成り立つことを示せ．

(2) (C) が成り立つならば，(B) も成り立つことを示せ．

(3) (C) が成り立っても，(A) が成り立たない例を $n = 2$ に対して一つあげよ．

(4) (A) が成り立っても，(C) が成り立たない $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ がともに非零行列の例を $n = 2$ に対して一つあげよ．

Problem A

Let $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{Q}$ be $n \times n$ real matrices, and consider the following equalities from (A) to (C) concerning matrix ranks ($n \geq 1$). Here, $\boldsymbol{R}^\top$ stands for the transpose of the matrix $\boldsymbol{R}$.

(A) $\mathrm{rank}[\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}] = n$.

(B) $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix} = n$.

(C) $\mathrm{rank}[\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{Q}] = n$.

Answer the following questions.

(1) Show that if (A) is satisfied, then (B) is also satisfied.

(2) Show that if (C) is satisfied, then (B) is also satisfied.

(3) Give an example for $n = 2$ such that (C) is satisfied, but (A) is not satisfied.

(4) Give an example with non-zero matrices $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{Q}$ for $n = 2$ such that (A) is satisfied, but (C) is not satisfied.

問 B

関数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$ $(-1 < x < 1)$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の $x = 0$ を中心とする冪（べき）級数展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

を考える．このとき a_n の値 $(n = 0, 1, 2, ...)$ を求めよ．

(2) 積分 $100 \displaystyle\int_0^{1/2} f(x)dx$ の値に最も近い整数を求めよ．

Problem B

Consider a function $f(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$ $(-1 < x < 1)$. Answer the following questions.

(1) Consider the power series for $f(x)$ centered at $x = 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Find the value of a_n for each $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(2) Find the nearest integer of the value of the integral $100 \displaystyle\int_0^{1/2} f(x)dx$.

問 C

$\{0,1\}$ 上の論理関数 N, $\wedge$, $\vee$, S の真理値表を以下のように書く（N は否定，$\wedge$ は論理積，$\vee$ は論理和である）．

x	$\mathsf{N}(x)$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\mathsf{S}(x,y)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

一般に関数 f を関数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ だけで（定数 $0,1$ も使わずに）定義できるとき，f は $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ 定義可能であると言う．たとえば $\mathsf{S}(x,y) = \mathsf{N}(x \wedge y)$ なので，S は $\{\mathsf{N}, \wedge, \vee\}$ 定義可能である．

(1) N, $\wedge$, $\vee$ がそれぞれ $\{\mathsf{S}\}$ 定義可能であることを示せ．

(2) 以下の関数 p が $\{\mathsf{N}, \wedge, \vee\}$ 定義可能であることを示せ．

x	y	z	$p(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

次に $\{0,1\}$ に第三の値 ω を加え，5 つの関数

$$\mathsf{N}, \mathsf{N}_0, \mathsf{N}_1 : \{0,1,\omega\} \to \{0,1,\omega\},$$
$$\wedge, \vee : \{0,1,\omega\}^2 \to \{0,1,\omega\}$$

を次ページのように定める（N, $\wedge$, $\vee$ は，$\{0,1\}$ 上のそれらを「引数にひとつでも ω がある場合には ω を返す」という方法で拡張したものである）．

（次ページへ続く）

x	$\mathsf{N}(x)$	$\mathsf{N}_0(x)$	$\mathsf{N}_1(x)$
0	1	1	1
1	0	0	0
ω	ω	0	1

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
0	ω	ω	ω
1	0	0	1
1	1	1	1
1	ω	ω	ω
ω	0	ω	ω
ω	1	ω	ω
ω	ω	ω	ω

(3) 以下の関数 C_1 と C_ω がそれぞれ $\{\mathsf{N}, \mathsf{N}_0, \mathsf{N}_1, \wedge, \vee\}$ 定義可能であることを示せ.

x	$\mathsf{C}_1(x)$	$\mathsf{C}_\omega(x)$
0	0	0
1	1	0
ω	0	1

(4) 以下の関数 q が $\{\mathsf{N}, \mathsf{N}_0, \mathsf{N}_1, \wedge, \vee\}$ 定義可能であることを示せ.

x	y	$q(x, y)$
0	0	1
0	1	0
0	ω	1
1	0	0
1	1	0
1	ω	0
ω	0	0
ω	1	1
ω	ω	0

Problem C

We write the truth tables for the Boolean functions N, $\wedge$, $\vee$ and S on $\{0,1\}$ as follows (N is negation, $\wedge$ is conjunction and $\vee$ is disjunction).

x	$\mathsf{N}(x)$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\mathsf{S}(x,y)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

We say that a function f is $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$-definable if f can be defined by using only the functions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (but not using constant 0 or 1). For example, S is $\{\mathsf{N}, \wedge, \vee\}$-definable because $\mathsf{S}(x,y) = \mathsf{N}(x \wedge y)$.

(1) Show that N, $\wedge$ and $\vee$ are $\{\mathsf{S}\}$-definable, respectively.

(2) Show that the following function p is $\{\mathsf{N}, \wedge, \vee\}$-definable.

x	y	z	$p(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

We next add a third value ω to $\{0,1\}$, and define five functions

$\mathsf{N}, \mathsf{N}_0, \mathsf{N}_1 : \{0,1,\omega\} \to \{0,1,\omega\}$, and

$\wedge, \vee : \{0,1,\omega\}^2 \to \{0,1,\omega\}$

as shown on the next page. Note that N, $\wedge$ and $\vee$ are extensions of those on $\{0,1\}$ such that the function returns ω if at least one of the arguments is ω.

(Continued on the next page)

x	$\mathsf{N}(x)$	$\mathsf{N}_0(x)$	$\mathsf{N}_1(x)$
0	1	1	1
1	0	0	0
ω	ω	0	1

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
0	ω	ω	ω
1	0	0	1
1	1	1	1
1	ω	ω	ω
ω	0	ω	ω
ω	1	ω	ω
ω	ω	ω	ω

(3) Show that the following functions C_1 and C_ω are $\{\mathsf{N}, \mathsf{N}_0, \mathsf{N}_1, \wedge, \vee\}$-definable, respectively.

x	$\mathsf{C}_1(x)$	$\mathsf{C}_\omega(x)$
0	0	0
1	1	0
ω	0	1

(4) Show that the following function q is $\{\mathsf{N}, \mathsf{N}_0, \mathsf{N}_1, \wedge, \vee\}$-definable.

x	y	$q(x, y)$
0	0	1
0	1	0
0	ω	1
1	0	0
1	1	0
1	ω	0
ω	0	0
ω	1	1
ω	ω	0

問 1

以下の問に答えよ．

(1) 整数 $a = 385$ と $b = 47$ について，$1 = ax + by$ となる $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ を 1 組求めよ．

(2) $A = \mathbb{Z}[X]$ を整数係数 1 変数多項式環とする．A が単項イデアル整域（PID）であるかどうか調べよ．PID である場合も，そうでない場合も，その証明をすること．

(3) A のイデアル $I = (2, X^2 + X + 1)$ を考える．商環 A/I の元の個数を調べよ（A/I が無限集合の場合はそう答えること）．

（注）可換環 A が PID であるとは，以下の 2 条件を満たすことをいう．

- A は零環でなく，さらに $x, y \in A$ が共に非零元のとき xy も非零元になる．
- A の任意のイデアル J について，ある $a \in A$ が存在し，$J = (a)$ となる．

Problem 1

Answer the following questions.

(1) For integers $a = 385$ and $b = 47$, find a pair of integers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ such that $1 = ax + by$.

(2) Let $A = \mathbb{Z}[X]$ be a univariate polynomial ring with integer coefficients. Determine whether A is a principal ideal domain (PID) or not. In either case, give a proof.

(3) Let $I = (2, X^2 + X + 1)$ be an ideal of A. Determine the number of elements of the quotient ring A/I. If A/I is an infinite set, answer as it is.

(Note) A commutative ring A is a PID if the following two conditions are satisfied.

- A is not a zero ring and xy is non-zero whenever x and y are both non-zero.
- For any ideal J of A, there exists $a \in A$ such that $J = (a)$.

問 2

$X \times Y$ を 2 つの空でない位相空間 X, Y の直積位相空間とし，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を Λ を添え字集合とする $X \times Y$ の開被覆とする．以下の問に答えよ．

(1) $X \times Y$ の直積位相の定義を述べよ．

(2) $X \times Y$ がコンパクトなら X がコンパクトであることを，コンパクト性の定義を用いて示せ．

(3) 直積位相の定義より，各 $(x, y) \in X \times Y$ に対して，

添え字 $\lambda(x, y) \in \Lambda$,

x の X における開近傍 $V_{x,y}$,

y の Y における開近傍 $W_{x,y}$

が存在して

$$V_{x,y} \times W_{x,y} \subset U_{\lambda(x,y)}$$

となる．いま，$y \in Y$ に依存する正の整数 $n(y)$ と，$n(y)$ 個の X 上の点列 $\{x_i(y)\}_{i=1}^{n(y)}$ が存在して

$$X = \bigcup_{i=1}^{n(y)} V_{x_i(y),y}$$

と書けていたとせよ．このとき

$$O_y = \bigcap_{i=1}^{n(y)} W_{x_i(y),y}$$

とおくと, $X \times O_y$ は

$$\bigcup_{i=1}^{n(y)} U_{\lambda(x_i(y),y)}$$

の部分集合になることを示せ．

(4) 前問（3）を用いて，X と Y がコンパクトならば，$X \times Y$ もコンパクトであることを示せ．

Problem 2

Let $X \times Y$ be the product of two non-empty topological spaces X and Y, and let $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ be an open covering of $X \times Y$ indexed by a set Λ. Answer the following questions:

(1) Give the definition of the product topology on $X \times Y$.

(2) Show that X is compact if $X \times Y$ is compact, based on the definition of compactness.

(3) By the definition of the product topology, for each $(x, y) \in X \times Y$, there exist

an index $\lambda(x, y) \in \Lambda$,
an open neighborhood $V_{x,y}$ of x in X, and
an open neighborhood $W_{x,y}$ of y in Y

such that

$$V_{x,y} \times W_{x,y} \subset U_{\lambda(x,y)}.$$

Suppose that there exist a positive integer $n(y)$ and a finite sequence $\{x_i(y)\}_{i=1}^{n(y)}$ of points in X depending on $y \in Y$ such that

$$X = \bigcup_{i=1}^{n(y)} V_{x_i(y),y}.$$

Setting

$$O_y = \bigcap_{i=1}^{n(y)} W_{x_i(y),y},$$

show that $X \times O_y$ is a subset of

$$\bigcup_{i=1}^{n(y)} U_{\lambda(x_i(y),y)}.$$

(4) Using (3), show that $X \times Y$ is compact if X and Y are compact.

問 3

$[0,1]\times[0,\infty)$ 上の C^∞ 関数 $u(x,t)$ が

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0<x<1,\ t>0), \\ u(x,0) = f(x) & (0 \leq x \leq 1), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & (t \geq 0) \end{cases}$$

を満たしているとする.

$$E_j(t) = \int_0^1 u(x,t)^j dx \qquad (j=1,2)$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $E_1(t)$ は定数であることを示せ.

(2) $E_2(t)$ は非増加関数であることを示せ.

(3) $E_2(t)$ が定数になるための $f(x)$ に関する必要十分条件を求めよ.

Problem 3

Let $u(x,t)$ be a C^∞ function over $[0,1] \times [0,\infty)$ satisfying

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < 1,\ t > 0), \\ u(x,0) = f(x) & (0 \le x \le 1), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & (t \ge 0). \end{cases}$$

Define

$$E_j(t) = \int_0^1 u(x,t)^j dx \qquad (j = 1, 2).$$

Answer the following questions.

(1) Show that $E_1(t)$ is a constant.

(2) Show that $E_2(t)$ is a non-increasing function.

(3) Obtain a necessary and sufficient condition for $f(x)$ to make $E_2(t)$ a constant.

問 4

パラメータ $\theta \in \mathbb{R}$ をもつ次の線形計画問題 $\mathcal{P}(\theta)$ を考える：

$$
\mathcal{P}(\theta) \ : \quad
\begin{array}{lcrcrcrcl}
\text{最小化} & : & 5x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{制約} & : & x_1 & & & + & 6x_3 & \geq & 8+\theta \\
 & & 3x_1 & - & x_2 & + & 8x_3 & \geq & 3 \\
 & & & & 3x_2 & & & \geq & 4+\frac{27}{2}\theta \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

$\mathcal{P}(\theta)$ の双対問題 を $\mathcal{D}(\theta)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{D}(\theta)$ を書き下せ．

(2) $\mathcal{D}(0)$ の最適解を $\boldsymbol{y}^*$ とする．$\boldsymbol{y}^*$ をシンプレックス法により求めよ．

(3) $\boldsymbol{y}^*$ が $\mathcal{D}(\theta)$ の最適解でもある θ の範囲を求めよ．

(4) $\mathcal{P}(\theta)$ の最適解を $\boldsymbol{x}^*(\theta)$ とする．(3) で求めた θ の範囲において，θ を用いて $\boldsymbol{x}^*(\theta)$ を表せ．

Problem 4

Consider a linear programming problem $\mathcal{P}(\theta)$ parameterized by $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{P}(\theta) \ : \quad \begin{array}{lcrcrcrcl} \text{minimize} & : & 5x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ \text{subject to} & : & x_1 & & & + & 6x_3 & \geq & 8+\theta \\ & & 3x_1 & - & x_2 & + & 8x_3 & \geq & 3 \\ & & & & 3x_2 & & & \geq & 4+\frac{27}{2}\theta \\ & & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Let $\mathcal{D}(\theta)$ be the dual problem of $\mathcal{P}(\theta)$. Answer the following questions.

(1) Write down $\mathcal{D}(\theta)$.

(2) Let $\boldsymbol{y}^*$ be an optimal solution of $\mathcal{D}(0)$. Compute $\boldsymbol{y}^*$ by the simplex method.

(3) Compute the range of θ such that $\boldsymbol{y}^*$ remains an optimal solution of $\mathcal{D}(\theta)$.

(4) Let $\boldsymbol{x}^*(\theta)$ be an optimal solution of $\mathcal{P}(\theta)$. In the range of θ obtained in (3), write down $\boldsymbol{x}^*(\theta)$ using θ.

問 5

事象 A の確率を $P(A)$ で表す．事象の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

と定義する．確率変数列に関する各種極限定理を前提とせずに以下の問 (1), (2) に答えよ．また，必要に応じて，不等式

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} < \int_x^{\infty} e^{-y^2/2} dy < \frac{1}{x} e^{-x^2/2}, \quad x > 0,$$

を証明なしに用いてもよい．

(1) $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を独立事象列とする．

(i) 以下の不等式を示せ．

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} P(B_k)\right).$$

ここで，B^c は事象 B の余事象を表す．

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$ のとき，任意の $n = 1, 2, \ldots$ に対して $P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right) = 1$ が成り立つことを示せ．

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$ のとき，$P(\limsup_{n\to\infty} B_n) = 1$ が成り立つことを示せ．

(2) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を独立同分布確率変数列とし，X_n は標準正規分布に従うとする．$n = 1, 2, \ldots$ に対して $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とおく．

(i) $P(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| \geq \sqrt{\log n}\}) = 1$ を示せ．

(ii) $P(\limsup_{n\to\infty}\{|S_n| \geq 2\sqrt{n \log n}\})$ を求めよ．

Problem 5

Denote by $P(A)$ the probability of an event A. For a sequence $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ of events, define

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Answer the following questions (1) and (2) without using the limit theorems on sequences of random variables. Here, the inequalities

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} < \int_x^{\infty} e^{-y^2/2} dy < \frac{1}{x} e^{-x^2/2}, \quad x > 0,$$

can be used without proofs, if necessary.

(1) Let $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of independent events.

(i) Prove the inequality

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k^c\right) \le \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} P(B_k)\right),$$

where B^c denotes the complement of an event B.

(ii) Show that $P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right) = 1$ for any $n = 1, 2, \ldots$ when $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$.

(iii) Show that $P(\limsup_{n\to\infty} B_n) = 1$ when $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \infty$.

(2) Let $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of independent and identically distributed random variables such that X_n follows the standard normal distribution. Let $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ for $n = 1, 2, \ldots$.

(i) Prove $P(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| \ge \sqrt{\log n}\}) = 1$.

(ii) Find $P(\limsup_{n\to\infty}\{|S_n| \ge 2\sqrt{n \log n}\})$.

問 6

パラメータ $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ をもつ確率密度関数 $p(x;\mu,\sigma)$, $x \in \mathbb{R}$ を

$$p(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(x-\mu)/\sigma}}{\sigma}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu \end{cases}$$

とする．$n \geq 2$ として，確率変数 $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立に確率密度関数 $p(x;\mu,\sigma)$ の分布にしたがうとする．また Y, Z を

$$Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

とする．なお，非負整数 k と正実数 c に対して $\lim_{x\to\infty} e^{-cx}x^k = 0$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．

(1) 非負整数 k に対し，X^k の期待値を a_k とする．a_{k+1} と a_k の間に成り立つ関係式を導出せよ．

(2) Y の確率密度関数を求めよ．

(3) σ は既知，μ は未知とする．このとき $Y - c_1$ と $Z - c_2$ がともに μ の不偏推定量になるように定数 c_1, c_2 を定めよ．またこれらの不偏推定量の分散を計算せよ．

(4) σ と μ はともに未知とする．Y, Z を用いて σ と μ の不偏推定量を構成せよ．

Problem 6

Let $p(x;\mu,\sigma)$ be a probability density function of $x \in \mathbb{R}$ with parameters $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$ defined by

$$p(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(x-\mu)/\sigma}}{\sigma}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu. \end{cases}$$

For $n \geq 2$, let $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ be random variables independently drawn from $p(x;\mu,\sigma)$. Define random variables Y and Z by

$$Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, \qquad Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

The fact that $\lim_{x\to\infty} e^{-cx}x^k = 0$ for any non-negative integer k and any positive real number c can be used without proof, if necessary.

(1) For any non-negative integer k, let a_k be the expectation of X^k. Find the relation between a_{k+1} and a_k.

(2) Find the probability density function of Y.

(3) Assume that σ is known and that μ is unknown. Find constants c_1 and c_2 such that both $Y - c_1$ and $Z - c_2$ become unbiased estimators of μ. Also, compute the variances of these unbiased estimators.

(4) Assume that both σ and μ are unknown. Find unbiased estimators of σ and μ using Y and Z.

問 7

(1) アルファベット $\Sigma_2 = \{0,1\}$ に対して，以下の言語を考える．

$$A = \{0, 01, 10\} \subseteq \Sigma_2^*$$

言語 A の補集合 $\overline{A} = \Sigma_2^* \setminus A$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 1) を示せ．

(2) アルファベット Σ に対して $B \subseteq \Sigma^*$ とする．言語 B が正規であるならば，その補集合 $\overline{B} = \Sigma^* \setminus B$ も正規であることを示せ．

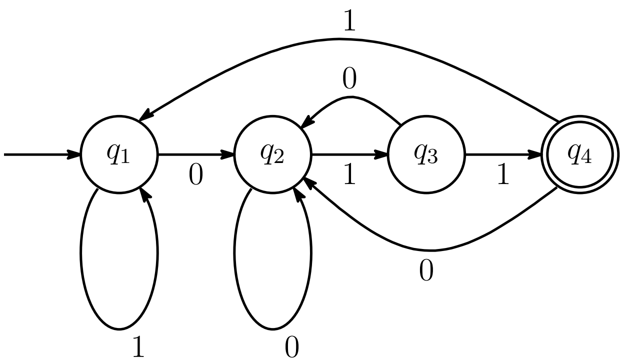
(3) アルファベット $\Sigma_1 = \{1\}$ に対して，以下の言語を考える．

$$C = \{1^\ell : \ell \geq 1 \text{ は平方数でない }\} \subseteq \Sigma_1^*$$

言語 C が正規か否かを示せ．言語 C が正規であるならば，それを認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図を与え，一方，正規でないなら，それが正規でないことをポンピング補題 (注 2) を用いて証明せよ．

注 1: 状態遷移図

以下は，アルファベット $\{0,1\}$ 上の言語 $L = \{w : w \text{ は } 011 \text{ で終わる }\}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態は q_4 である．



注 2: ポンピング補題

言語 L が正規であるとき，以下のような整数 p (ポンピング長) が存在する:

$|s| \geq p$ を満たす任意の $s \in L$ に対して，文字列 s は以下の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割することができる:

1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$

ここで $|s|$ は文字列 s の長さを表し，y^i は文字列 y を i 回連結したものを表す．ただし，文字列 y^0 は空列 ε (文字を 1 つも含まない文字列) を表す．

Problem 7

(1) For the alphabet $\Sigma_2 = \{0, 1\}$, let us consider the following language:

$$A = \{0, 01, 10\} \subseteq \Sigma_2^*.$$

Show a state transition diagram (see Note 1) of a deterministic finite automaton that recognizes the complement $\overline{A} = \Sigma_2^* \setminus A$ of the language A.

(2) For an alphabet Σ, let $B \subseteq \Sigma^*$. Show that if B is regular, then $\overline{B} = \Sigma^* \setminus B$ is also regular.

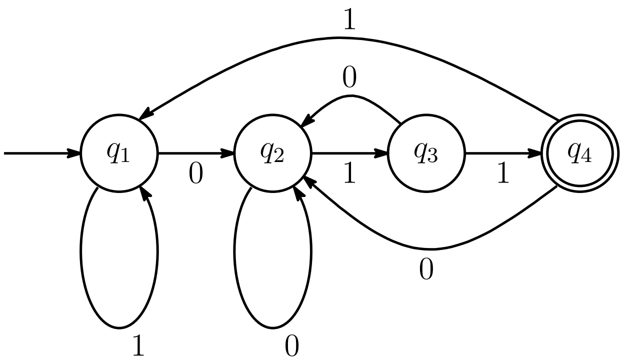
(3) For the alphabet $\Sigma_1 = \{1\}$, let us consider the following language:

$$C = \{1^\ell : \ell \geq 1 \text{ is not a square number}\} \subseteq \Sigma_1^*.$$

Show whether C is regular or not. If it is regular, give a state transition diagram of a deterministic finite automaton that recognizes it. If not, prove this fact by using the pumping lemma (see Note 2).

Note 1: State transition diagram

The following is an example of a state transition diagram of a deterministic finite automaton that recognizes the language $\{w : w \text{ ends with } 011\}$ over the alphabet $\{0, 1\}$, where q_1 is the start state and q_4 is an accept state.



Note 2: The pumping lemma

If L is regular, then there exists an integer p (the pumping length) such that

for any $s \in L$ with $|s| \geq p$, we can divide s into three pieces, $s = xyz$, satisfying the following conditions:

1. $xy^iz \in L$ for each $i \geq 0$,
2. $|y| > 0$, and
3. $|xy| \leq p$,

where $|s|$ denotes the length of the string s, y^i denotes the concatenation of i copies of y, and y^0 denotes the empty string ε (the string with length zero).

問 8

二分木について以下の問いに答えよ．二分木の内部ノードは全て 2 つの子を持ち，葉ノードには正の整数値が割り当てられている．全てのノードは正の整数で特定でき，それを以下では ID と書く．また ID が i であるノードを「ノード i」，ノード i を根とする木を「木 i」と呼ぶ．木に関する操作には以下の関数がある．

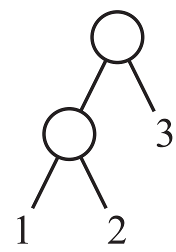
LEAF(n)	整数値 n が割り当てられた新しい葉ノードを作り，その ID を返す
NODE(ℓ,r)	左右の子ノード ID がそれぞれ ℓ, r である新しい内部ノードを作り，その ID を返す
LFT(i)	ノード i が内部ノードの場合，左の子ノードの ID を返す
RHT(i)	ノード i が内部ノードの場合，右の子ノードの ID を返す
VAL(i)	ノード i が葉ノードの場合，割り当てられた整数値を返し，そうでなかった場合 0 を返す

また，プログラム実行時にはスタックデータ構造が 1 つあり，以下の関数で操作できる．

PUSH(i)	整数値 i を積む
POP()	最後に積まれた整数値 i を取り除き，i を返す

(1) 関数 p(id,ord) が以下の疑似コードのように定義されていたとする．木 A が下の図のようになっているときに p(A,TRUE), p(A,FALSE) の出力をそれぞれ $n_1, n_2, \ldots$ のように書け．

```
def p(id,ord)
  if VAL(id) == 0 then
    if ord then PRINT(0) end
    p(LFT(id),ord)
    p(RHT(id),ord)
    if !ord then PRINT(0) end
  else
    PRINT(VAL(id))
  end
end
```



(2) p(B,FALSE) が順に $1, 2, 3, 0, 0$ と出力するような木 B を 1 つ図示せよ．

(3) p の出力から木を復元したい．p(i,ord) を実行した後に GET() を呼び出すと，PRINT が出力した値を順に 1 つずつ返すものとする．p(i,TRUE) を実行した後に呼び出すと，木 i に等しい木 j を作り，j を返すような関数 f() を定義せよ．

(4) p(i,FALSE) を実行した後に呼び出すと，木 i に等しい木 j を作り，j を返すような関数 g() を定義せよ．ただし PRINT が呼び出された回数より GET() が呼び出された回数が多くなったときは，GET() は -1 を返すものとする．

Problem 8

Answer the following questions about binary trees where every internal node has just two children, and every leaf node is associated with a positive integer value. Every node can be identified by a positive integer, called ID. We refer to a node that has ID i as "node i", and a tree whose root node has ID i as "tree i". The following functions manipulate trees.

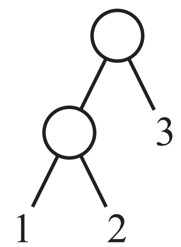
`LEAF(`n`)`	creates a new leaf node, associates an integer value n to it, and returns the ID of the node
`NODE(`ℓ`,`r`)`	creates a new internal node whose left and right children's IDs are ℓ and r, respectively, and returns the ID of the node
`LFT(`i`)`	returns the ID of the left child of the node i if it is an internal node
`RHT(`i`)`	returns the ID of the right child of the node i if it is an internal node
`VAL(`i`)`	returns a value associated to the node i if it is a leaf; otherwise returns 0

There is one stack data structure at runtime, which can be manipulated by the following functions.

`PUSH(`i`)`	pushes an integer value i
`POP()`	removes the value i that is lastly pushed, and returns i

(1) Assume function `p(id,ord)` is defined as the following pseudocode. When tree A is formed as drawn below, write the sequence of the outputs from `p(`A`,TRUE)` and `p(`A`,FALSE)`, respectively, in the format like $n_1, n_2, \ldots$.

```
def p(id,ord)
  if VAL(id) == 0 then
    if ord then PRINT(0) end
    p(LFT(id),ord)
    p(RHT(id),ord)
    if !ord then PRINT(0) end
  else
    PRINT(VAL(id))
  end
end
```



(2) Draw such a tree B that `p(`B`,FALSE)` outputs numbers $1, 2, 3, 0, 0$ in this order.

(3) Consider reconstructing a tree from the output of `p`. Assume `GET()` is a function, when it is called after an execution of `p(`i`,ord)`, that returns the output of `PRINT` one by one in the printed order. Define function `f()`, when it is called after an execution of `p(`i`,TRUE)`, that creates a tree j equivalent to the tree i, and returns j.

(4) Define function `g()`, when it is called after an execution of `p(`i`,FALSE)`, that creates a tree j equivalent to the tree i, and returns j. When `GET()` is called more times than `PRINT`, `GET()` returns -1.

問 9

以下の問に答えよ．

(1) オペレーティングシステム（以降 OS）が管理するスレッドとプロセスがどのようなものであるかを説明せよ．説明には以下のキーワードをすべて用いること．また，両者の共通点，両者の相違点が明確になるよう説明すること．

キーワード：抽象化，メモリ空間，マルチプロセッサ（またはマルチコア），プログラム実行の流れ

(2) 仮想記憶方式のシステムにおいて，物理メモリに空きがない状態でプログラムが仮想アドレスを読み込もうとしたときに，ページフォールトが起きた．この場合に OS が行う作業を，以下のキーワードをすべて用いて説明せよ．

キーワード：二次記憶，ページテーブル，退避

(3) OS は，仮想アドレスを物理アドレスに変換するアドレス変換を担う．以下では，32 ビットプロセッサにおいて 2 段のページテーブルを用いるとする．ページのサイズは 4 キロバイト，1 段目，2 段目を参照するためのインデックスはともに 10 ビットであるとする．ただし，1 キロバイトは 1024 バイトとする．

メモリを 1024 ページ割り当てる場合を考える．ここで 2 段目のためのテーブルがいくつ必要となるかは，割り当て領域の仮想アドレスが連続しているか否かによって変わってくる．2 段目のためのテーブルの数は，最小と最大でそれぞれいくつとなるか，答えよ．

Problem 9

Answer the following questions.

(1) Operating systems manage threads and processes. Define a process and a thread by using all the following keywords. The definitions should clarify commonalities and differences between a process and a thread.

Keywords: abstraction, memory space, multi-processor (or multi-core), flow of program execution

(2) Consider a page fault that occurs in a system using virtual memory. Assume that the page fault occurred when a program tried to read from a virtual address yet there was no free physical memory. Describe the actions the operating system performs for this event by using all the following keywords.

Keywords: secondary storage, page table, page out

(3) Operating systems take charge of address translation from a virtual address that a process uses to a physical address. Suppose a 32-bit processor that uses two-level page tables. The size of a page is 4 kilobytes. The bit width of an index to lookup both the first- and second-level tables is 10 bits. Note that 1 kilobyte is 1024 bytes.

Suppose that 1024 pages of memory is allocated. The number of the required second-level tables depends on whether the virtual addresses of the allocated memory are continuous or not. Answer the minimum number and the maximum number of the second-level tables.