専門科目 (午前)

2022 大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 00 分 – 午後 12 時 30 分

Mathematical and Computing Science

Time 9:00AM – 12:30PM

注意事項

1. 問 A, 問 B, 問 C より 2 問を選択し解答せよ.
2. 問 1〜問 9 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

Instruction

1. Solve 2 problems out of Problems A, B, and C.
2. Solve 3 problems out of Problems 1 to 9.
3. Note that if you solved more problems than specified above, problems you solved might not be scored.
4. Write the problem number and your examinee number in the designated place of each answer sheet.
5. Use one answer sheet per problem.
6. You may use the other side of the answer sheet, but in that case you should indicate that, for example, by writing “continue to the other side.”

問 A

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ を 1 次独立な d 次元列ベクトルとする．ただし次元 d は 2 以上とする．$d \times d$ 行列 A を

$$A = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T - \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T$$

と定義する．ここで $\boldsymbol{z}^T$ は $\boldsymbol{z}$ の転置である．また $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d$ のノルムを $\|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z}}$ とする．解答では，コーシー・シュワルツ不等式とその等号成立条件に関する事実を証明なしに用いてよい．

(1) $d = 2$ のとき，$A^5 = A$ を満たす $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ の例を一組見つけよ．

(2) A^2 の非ゼロ固有値に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の線形和で表されることを証明せよ．

(3) A^2 の非ゼロ固有値を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とそれらのノルムで表せ．

(4) $A^3 \neq A$ を証明せよ．

Problem A

Let $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ be linearly independent d-dimensional column vectors. The dimension d is assumed to be greater than or equal to 2. The $d \times d$ matrix A is defined by

$$A = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T - \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T,$$

where $\boldsymbol{z}^T$ is the transpose of $\boldsymbol{z}$. The norm of $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d$ is denoted by $\|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z}}$. In the answer, the Cauchy-Schwarz inequality and the condition of equality can be used without proof.

(1) For $d = 2$, find a pair of $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ such that $A^5 = A$ holds.

(2) Show that each eigenvector of non-zero eigenvalues for A^2 is expressed by a linear sum of $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$.

(3) Express non-zero eigenvalues of A^2 in terms of $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ and their norms.

(4) Show that $A^3 \neq A$.

問 B

$A(x)$ と $B(y)$ を $\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{C}^2$-級の実数値関数とし，$C(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の $\mathcal{C}^2$-級の実数値関数とするとき以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = A(x) + xB(y)$$

と定めると， f は A と B を含まない関係式 $xf_{xy} = f_y$ を満たすことを示せ，但し $f_y = \partial f/\partial y$, $f_{xy} = \partial^2 f/\partial x \partial y$ 等とする．

(2) 関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y) = A(x)B(y)$$

と定めるとき，積 $g_{xy}g$ を g_x と g_y を用いた A と B を含まない式で表わせ．

(3) 関数 $h(x,y) = C(x+y, x-y)$ に対して，$h_{xx}(x,y) - h_{yy}(x,y)$ を計算せよ．

(4) 関数 $k(x,y)$ を

$$k(x,y) = A(x+y)B(x-y)$$

と定めるとき，積 $(k_{xx} - k_{yy})k$ を k_x と k_y を用いた A と B を含まない式で表わせ．

Problem B

Let $A(x)$ and $B(y)$ be real-valued $\mathcal{C}^2$-functions on $\mathbb{R}$, and let $C(x, y)$ be a real-valued $\mathcal{C}^2$-function on $\mathbb{R}^2$. Answer the following questions:

(1) Show that the function defined by

$$f(x, y) = A(x) + xB(y)$$

satisfies the relation $xf_{xy} = f_y$ not containing A and B, where $f_y = \partial f/\partial y$ and $f_{xy} = \partial^2 f/\partial x \partial y$ etc.

(2) Consider the function defined by

$$g(x, y) = A(x)B(y).$$

Show that the product $g_{xy}g$ can be expressed in terms of g_x and g_y without use of A and B.

(3) By setting $h(x, y) = C(x + y, x - y)$, compute $h_{xx}(x, y) - h_{yy}(x, y)$.

(4) Consider the function defined by

$$k(x, y) = A(x + y)B(x - y).$$

Show that the product $(k_{xx} - k_{yy})k$ can be expressed in terms of k_x and k_y without use of A and B.

問 C

論理式は命題変数 $x, y, \ldots$ から論理記号 $\wedge$ (論理積), $\vee$ (論理和), $\neg$ (否定) を用いて構成される．論理式を表す文字として φ, ψ などを用いる．真理値割り当てとは各命題変数に $\mathtt{0}$(偽) または $\mathtt{1}$(真) の真理値を割り当てる関数である．真理値割り当て f による論理式 φ の真理値を $f(\varphi)$ と書く．たとえば $f(x) = \mathtt{0}, f(y) = \mathtt{1}$ ならば $f(x \vee \neg(y \wedge \neg x)) = \mathtt{0}$ である．論理式 φ が充足可能であるとは，$f(\varphi) = \mathtt{1}$ となる真理値割り当て f が存在することである．

(1) 次の論理式が充足可能であるか否かを理由をつけて述べよ．

$$(x \vee y \vee z) \wedge \neg(y \wedge z) \wedge \neg x$$

(2) 次の主張が成り立つか否かを述べよ．

もし φ と ψ がともに充足可能であるならば，$\varphi \wedge \psi$ は充足可能である．

そして成り立つ場合はこれを証明し，成り立たない場合は反例を挙げよ．

(3) 次の主張が成り立つか否かを述べよ．

もし φ と ψ のどちらかが充足可能であるならば，$\varphi \vee \psi$ は充足可能である．

そして成り立つ場合はこれを証明し，成り立たない場合は反例を挙げよ．

(4) 与えられた論理式 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ $(n \geq 2)$ に対して，論理式 φ^+ を次で定義する．

$$(\varphi_1 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee \varphi_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \varphi_3 \vee \neg x_3) \wedge \cdots \wedge (x_{n-2} \vee \varphi_{n-1} \vee \neg x_{n-1}) \wedge (x_{n-1} \vee \varphi_n)$$

ただし命題変数 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ は互いに異なり，$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ の中に現れないものとする．次のふたつを証明せよ．

(4-1) $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$ が充足可能ならば，φ^+ も充足可能である．

(4-2) φ^+ が充足可能ならば，$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$ も充足可能である．

Problem C

Logical formulas are constructed from propositional variables $x, y, \ldots$ by using the logical connectives $\wedge$ (conjunction), $\vee$ (disjunction), and $\neg$ (negation). We use letters $\varphi, \psi, \ldots$ to denote logical formulas. A truth assignment is a function that assigns a truth value $\mathtt{0}$ (false) or $\mathtt{1}$ (true) to each propositional variable. For a truth assignment f, $f(\varphi)$ denotes the truth value of φ under f. For example, if $f(x) = \mathtt{0}$ and $f(y) = \mathtt{1}$, then $f(x \vee \neg(y \wedge \neg x)) = \mathtt{0}$. A logical formula φ is said to be satisfiable if and only if there exists a truth assignment f such that $f(\varphi) = \mathtt{1}$.

(1) Determine and explain whether the following formula is satisfiable or not.

$$(x \vee y \vee z) \wedge \neg(y \wedge z) \wedge \neg x$$

(2) Determine whether the following statement holds.

If both φ and ψ are satisfiable, then $\varphi \wedge \psi$ is satisfiable.

If this statement holds, prove it. If not, give a counterexample.

(3) Determine whether the following statement holds.

If either φ or ψ is satisfiable, then $\varphi \vee \psi$ is satisfiable.

If this statement holds, prove it. If not, give a counterexample.

(4) Given formulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ($n \geq 2$), a formula φ^+ is defined as

$$(\varphi_1 \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee \varphi_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \varphi_3 \vee \neg x_3) \wedge \cdots \wedge (x_{n-2} \vee \varphi_{n-1} \vee \neg x_{n-1}) \wedge (x_{n-1} \vee \varphi_n),$$

where the propositional variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ are mutually distinct and do not appear in $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Prove the following two statements.

(4-1) If $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$ is satisfiable, then φ^+ is satisfiable.

(4-2) If φ^+ is satisfiable, then $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$ is satisfiable.

問 1

p を素数とし，標数 p の有限素体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を $\mathbb{F}_p$ と書く．$GL_2(\mathbb{F}_p)$ を $\mathbb{F}_p$ を成分とする 2×2 可逆行列が行列の積についてなす群，

$$SL_2(\mathbb{F}_p) = \{M \in GL_2(\mathbb{F}_p)\,;\det(M) = 1\}$$

をその部分群とする．ここで $\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$ は 2×2 行列の行列式である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 以下の条件 $(*)$ を満たす群 G とその部分群 H の例を 1 つ挙げ，そのような例になっている理由を説明せよ．

$(*)$ H は G の正規部分群ではない

(2) $SL_2(\mathbb{F}_p)$ は $GL_2(\mathbb{F}_p)$ の正規部分群であることを示せ．

(3) $GL_2(\mathbb{F}_3)$ の位数 2 の元をすべて求めよ．

(4) 商群 $GL_2(\mathbb{F}_5)/SL_2(\mathbb{F}_5)$ は，位数 4 の巡回群になることを示せ．

Problem 1

For a prime number p, we denote by $\mathbb{F}_p$ the finite prime field $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. We define $GL_2(\mathbb{F}_p)$ to be the group of 2×2 invertible matrices whose entries belong to $\mathbb{F}_p$ and define the subgroup $SL_2(\mathbb{F}_p)$ of $GL_2(\mathbb{F}_p)$ by

$$SL_2(\mathbb{F}_p) = \{M \in GL_2(\mathbb{F}_p)\,;\det(M) = 1\},$$

where $\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$ stands for the determinant of a 2×2 matrix. Answer the following questions.

(1) Give an example of a group G and its subgroup H that satisfies the condition $(*)$ below. When answering, provide an explanation why it is such an example.

$(*)$ H is not a normal subgroup of G

(2) Prove that $SL_2(\mathbb{F}_p)$ is a normal subgroup of $GL_2(\mathbb{F}_p)$.

(3) Find all the elements of $GL_2(\mathbb{F}_3)$ that have order 2.

(4) Show that the quotient group $GL_2(\mathbb{F}_5)/SL_2(\mathbb{F}_5)$ is a cyclic group of order 4.

問 2

X を位相空間とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) ハウスドルフ空間の定義を述べよ．また，X が有限集合かつハウスドルフ空間のとき，X の位相を決定せよ．

(2) $X \times X$ の部分集合

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X \,;\, x \in X\}$$

が積位相に関して閉集合のとき， X はハウスドルフ空間になることを示せ．

(3) X 上の同値関係 $\sim$ に対して，

$$[x] = \{y \in X \,;\, y \sim x\}$$

により $x \in X$ の属する同値類を定義する．また

$$X/\!\sim = \{[x] \,;\, x \in X\}$$

によって X 上の同値関係 $\sim$ による商集合を定義し，$p : X \ni x \mapsto [x] \in X/\!\sim$ で自然な射影を表わす．このとき，集合系

$$\mathcal{V} = \{V \subset X/\!\sim \,;\, p^{-1}(V) \text{ は } X \text{ の開集合}\}$$

は $X/\!\sim$ の位相となることを示せ．

(4) 前問で与えた同値関係 $\sim$ を用いて

$$R = \{(x, y) \in X \times X \,;\, x \sim y\}$$

によって定まる $X \times X$ の部分集合が積位相に関して閉集合でかつ射影 $p : X \to X/\!\sim$ は開写像であると仮定する．このとき，$(X/\!\sim, \mathcal{V})$ はハウスドルフ空間になることを示せ．

Problem 2

Let X be a topological space. Answer the following questions.

(1) Give the definition of Hausdorff space. Suppose that X is a Hausdorff space. Determine the topology of X under the assumption that X is a finite set.

(2) Consider the subset

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X \,;\, x \in X\}$$

of $X \times X$. Show that X is a Hausdorff space if Δ is closed with respect to the product topology on $X \times X$.

(3) Let $\sim$ be an equivalence relation on X, and denote by

$$[x] = \{y \in X \,;\, y \sim x\}$$

the equivalence class of $x \in X$. Moreover, let

$$X/\!\sim\, = \{[x] \,;\, x \in X\}$$

be the quotient set of X by the equivalence relation $\sim$ and denote by $p : X \ni x \mapsto [x] \in X/\!\sim$ the canonical projection. Show that

$$\mathcal{V} = \{V \subset X/\!\sim \,;\, p^{-1}(V) \text{ is an open subset of } X\}$$

is a topology on the set $X/\!\sim$.

(4) Let $\sim$ be the equivalence relation as in (3), and consider the subset

$$R = \{(x, y) \in X \times X \,;\, x \sim y\}$$

in $X \times X$. Suppose that R is closed with respect to the product topology on $X \times X$ and the projection $p : X \to X/\!\sim$ is an open map. Then show that $(X/\!\sim, \mathcal{V})$ is a Hausdorff space.

問 3

積分方程式

$$f(x) = \int_0^1 \frac{f(y) + y}{e^{x+y}} dy \tag{*}$$

をみたす区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 f を考える.
$[0, 1]$ 上の実数値連続関数全体のなす線形空間 $C[0, 1]$ に対してノルム

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\,; 0 \leq x \leq 1\}$$

を導入したバナッハ空間を X とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $\|f\|$ は実際に X 上のノルムを定めることを示せ.

(2) X の元 f に対し,

$$(Tf)(x) = \int_0^1 \frac{f(y) + y}{e^{x+y}} dy$$

とおく. T は X から X への線形写像となるか否かを理由を付けて答えよ.

(3) (*) の解が X 上唯一つ存在することを示せ.

Problem 3

Consider the integral equation

$$f(x) = \int_0^1 \frac{f(y) + y}{e^{x+y}} dy, \tag{*}$$

where f is a real-valued continuous function over the interval $[0, 1]$.
Let X be a Banach space of real continuous functions over $[0, 1]$ with the norm

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\,; 0 \leq x \leq 1\}.$$

Answer the following questions.

(1) Show that $\|f\|$ really defines the norm over X.

(2) For $f \in X$, let

$$(Tf)(x) = \int_0^1 \frac{f(y) + y}{e^{x+y}} dy.$$

Answer, with a reason, whether T defines a linear map from X to X or not.

(3) Show that (*) has a unique solution in X.

問 4

以下の線形計画問題 (P) を考える．

$$
(P) \qquad \begin{array}{lcrcl} \text{最大化} & : & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & & \\ \text{制約} & : & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}. \end{array}
$$

ただし，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は入力データであり，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数ベクトルである．また，$\boldsymbol{0}$ はゼロベクトルである．上付き添え字の T はベクトルの転置を表し，ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{v}$ は成分ごとの不等式を表す．
以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき，(P) が実行可能解を持つことを示せ．

(2) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき，(P) に最適解が存在すれば，最適値は 0 であることを示せ．

(3) 入力データが

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

で与えられているときに，(P) の最適解を求めよ．

Problem 4

Consider a linear programming problem (P) as follows:

$$(P) \qquad \begin{array}{lcrcl} \text{maximize} & : & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & & \\ \text{subject to} & : & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} & \geq & \mathbf{0}. \end{array}$$

Here, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ are input data, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ is a variable vector, and $\mathbf{0}$ is the zero vector. The superscript T indicates the transpose of a vector, and $\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{v}$ denotes the element-wise inequality for vectors $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$.
Answer the following questions.

(1) Suppose $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$. Show that (P) has a feasible solution.

(2) Suppose $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$. Show that, if (P) has an optimal solution, the optimal value is equal to 0.

(3) Suppose that the input data are given as follows:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ and } \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Obtain an optimal solution of (P).

問 5

$\mathbb{R}$ を実数の集合，$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上のボレル集合体とする．f, g をともに $\mathbb{R}$ 上の確率密度関数として，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ と $r \in \mathbb{R}$ をそれぞれ，

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x)\},$$
$$r = \int_{-\infty}^{\infty} \min\bigl\{f(x), g(x)\bigr\}\, \mathrm{d}x$$

により定める．以下では，P は確率を表すものとし，確率変数 X, Y の周辺確率分布はそれぞれ f, g により定まるものとする．

(1) $\mathsf{P}(X \in A) + \mathsf{P}(Y \in A^c) = r$ であることを示せ．ここで A^c は A の補集合である．

(2) $\mathsf{P}(X = Y) \leq r$ であることを示せ．ただし，X と Y は互いに独立ではないものとする．

(3) $|\mathsf{P}(X \in A) - \mathsf{P}(Y \in A)| = |\mathsf{P}(X \in A^c) - \mathsf{P}(Y \in A^c)| = 1 - r$ であることを示せ．

(4) 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $|\mathsf{P}(X \in B) - \mathsf{P}(Y \in B)| \leq 1 - r$ であることを示せ．

Problem 5

Let $\mathbb{R}$ and $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denote the set of real numbers and the Borel field on $\mathbb{R}$, respectively. Let f and g be both probability density functions on $\mathbb{R}$, and define $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ and $r \in \mathbb{R}$ as

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x)\}, \\
r &= \int_{-\infty}^{\infty} \min\bigl\{f(x), g(x)\bigr\}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

In the following, P denotes the probability and the marginal probability distributions of random variables X and Y are determined by f and g, respectively.

(1) Show $\mathsf{P}(X \in A) + \mathsf{P}(Y \in A^c) = r$, where A^c denotes the complement of A.

(2) Show $\mathsf{P}(X = Y) \leq r$, where X and Y are not independent of each other.

(3) Show $|\mathsf{P}(X \in A) - \mathsf{P}(Y \in A)| = |\mathsf{P}(X \in A^c) - \mathsf{P}(Y \in A^c)| = 1 - r$.

(4) Show $|\mathsf{P}(X \in B) - \mathsf{P}(Y \in B)| \leq 1 - r$ for any $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

問 6

x, y を実数，n を正の整数，θ を $|\theta| < 1$ を満たす実数とする．パラメータ θ が与えられたとき，$\mathbb{R}^2$ 上の確率密度関数

$$p(x, y; \theta) = C(\theta) \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2\theta xy)\right)$$

を持つ確率分布を $\mathcal{N}(\theta)$ と書く．ここで $C(\theta)$ は θ の関数であり (x, y) には依存しない．(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) を $\mathbb{R}^2$ に値をとる確率変数とし，$\mathcal{N}(\theta)$ に独立に従うとする．また θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = \frac{\theta}{1 - \theta^2}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．ただし次の公式を証明なしで用いてもよい．

$$a > 0 \text{ ならば } \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2/2)dx = \sqrt{2\pi/a}.$$

(1) 関数 $C(\theta)$ を求めよ．

(2) (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) が与えられたときのパラメータ θ の最尤推定量を $\hat{\theta}$ とする．$f(\hat{\theta})$ を X_1, X_2, ..., X_n および Y_1, Y_2, ..., Y_n を用いて表せ．

(3) (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) が $\mathcal{N}(0)$ に独立に従うとする．$f(\hat{\theta})^2$ の期待値を求めよ．

Problem 6

Let x, y be real numbers, n be a positive integer, and θ be a real number satisfying $|\theta| < 1$. For a given parameter θ, the probability distribution that has a probability density function on $\mathbb{R}^2$

$$p(x, y; \theta) = C(\theta) \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2\theta xy)\right)$$

is denoted by $\mathcal{N}(\theta)$. Here $C(\theta)$ is a function of θ and does not depend on (x, y). Assume that (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) are $\mathbb{R}^2$-valued random variables that are independently distributed from $\mathcal{N}(\theta)$. A function $f(\theta)$ of θ is defined by

$$f(\theta) = \frac{\theta}{1 - \theta^2}.$$

Answer the following questions. The following formula can be used without proof.

$$\text{If } a > 0, \ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2/2)dx = \sqrt{2\pi/a}.$$

(1) Find the function $C(\theta)$.

(2) For given (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n), the maximum likelihood estimator of the parameter θ is denoted by $\hat{\theta}$. Express $f(\hat{\theta})$ using X_1, X_2, ..., X_n and Y_1, Y_2, ..., Y_n.

(3) Assume that (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) are independently distributed from $\mathcal{N}(0)$. Find the expectation of $f(\hat{\theta})^2$.

問 7

Σ を任意のアルファベットとし，$\Sigma_2 = \{0, 1\}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $A, B \subseteq \Sigma^*$ とする．言語 A と B が正規であるならば，$A \backslash B = \{w \mid w \in A \text{ かつ } w \notin B\}$ も正規であることを決定性有限オートマトン（注 1）を用いて示せ．

(2) Σ_2 上の言語 C が正規でないことを，ポンピング補題 (注 2) を用いて示せ．

$$C = \{ww \mid w \in \Sigma_2^*\}$$

(3) Σ_2 上の言語 D が正規でないことを示せ．

$$D = \{w_1 w_2 \mid |w_1| = |w_2| \text{ かつ } w_1 \neq w_2\}$$

(4) $E \subseteq \Sigma^*$ とする．言語 E が正規かつ無限集合であるならば，以下の条件を満たす言語 F, G が存在することをポンピング補題 (注 2) を用いて示せ．

- F, G は正規かつ無限集合
- $E = F \cup G$
- $F \cap G = \varnothing$

注 1: 決定性有限オートマトン
決定性有限オートマトンは以下の 5 つ組 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ である．

1. Q は状態の集合 (有限集合)
2. Σ はアルファベット (有限集合)
3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ は状態遷移関数
4. $q_0 \in Q$ は開始状態
5. $F \subseteq Q$ は受理状態の集合

注 2: ポンピング補題
言語 L が正規言語であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

> w が $|w| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，w は次の条件を満たすように 3 つの部分 $w = xyz$ に分割できる:
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
> 2. $|y| > 0$
> 3. $|xy| \leq p$

ただし，y^i は i 個の y を連結したものを表わす．

Problem 7

Let Σ be an arbitrary alphabet and $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Answer the following questions.

(1) Let $A, B \subseteq \Sigma^*$. Show that if A and B are regular, then $A \setminus B = \{w \mid w \in A \text{ and } w \notin B\}$ is also regular by using deterministic finite automata (Note 1).

(2) Show that the language C over Σ_2 is not regular by using the pumping lemma (Note 2).

$$C = \{ww \mid w \in \Sigma_2^*\}$$

(3) Show that the language D over Σ_2 is not regular.

$$D = \{w_1 w_2 \mid |w_1| = |w_2| \text{ and } w_1 \neq w_2\}$$

(4) Let $E \subseteq \Sigma^*$. Show that if E is regular and infinite, then there exist languages F and G that satisfy the following conditions by using the pumping lemma (Note 2).

- F and G are regular and infinite.
- $E = F \cup G$.
- $F \cap G = \varnothing$.

Note 1: Deterministic finite automaton
A deterministic finite automaton is a 5-tuple $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, where

1. Q is a finite set of states,
2. Σ is a finite alphabet,
3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ is the transition function,
4. $q_0 \in Q$ is the start state, and
5. $F \subseteq Q$ is the set of accept states.

Note 2: The pumping lemma
If L is a regular language, then there exists a number p (the pumping length) such that

> for any string w in L such that $|w| \geq p$, we can divide w into three pieces, $w = xyz$, satisfying the following conditions:
>
> 1. for each $i \geq 0$, $xy^i z \in L$,
> 2. $|y| > 0$, and
> 3. $|xy| \leq p$,

where y^i is the string obtained by concatenating i copies of y.

問 8

S 式を扱うプログラムについて以下の問いに答えよ．ここでの S 式とは (a) 整数，(b) NIL，または (c) 2 つの S 式の組であり，以下の関数で操作するものとする．

CONS(ℓ,r)	S 式 ℓ, r を左右の要素とする組を返す
LEFT(x)	x が組のときその左の要素を返す
RIGHT(x)	x が組のときその右の要素を返す
CONSP(x)	x が組のとき真，それ以外は偽を返す

また CONS(x_1,CONS(x_2,...,CONS(x_n,NIL)...)) という形の S 式をリストと呼び，$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ のように略記する．

(1) 2 つのリストを連結したリストを返す関数 app(x,y) を定義せよ．リスト $[x_1, \ldots, x_n]$ と $[y_1, \ldots, y_m]$ の連結は $[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ であり，例えば app($[1, [2]]$,$[[3, 4], 5]$) $= [1, [2], [3, 4], 5]$ である．

(2) 次の f(x) は S 式を入力とする関数である．f($[[1, 2], [3], [[4], 5]]$) の返り値を書け．

```
def f(x)
  if CONSP(x) then
    return app(f(LEFT(x)),f(RIGHT(x)))
  elsif x == NIL then
    return NIL
  else
    return CONS(x,NIL)
  end
end
```

(3) 次の m(n) は非負整数を入力とする関数である． 関数 m が作る S 式 m(n) を s_n とするとき，f(s_n) が行う CONS の回数を求めよ．

```
def m(n)
  if n == 0 then
    return NIL
  else
    return CONS(m(n-1),0)
  end
end
```

(4) 関数 f(x) を改善した関数を定義し，f(x) と同じ結果を返すが，n 個の整数要素を持つ x に対して $O(n)$ 回しか CONS を行わないようにせよ．定義では S 式以外のデータ構造を用いてはならない．

Problem 8

Answer the following questions about programs that manipulate S-expressions. An S-expression in this problem is either (a) an integer, (b) `NIL` or (c) a pair of two S-expressions. They are manipulated by the following operations.

`CONS`(ℓ,r)	returns a pair whose left and right elements are respectively ℓ and r
`LEFT`(x)	returns its left element when x is a pair
`RIGHT`(x)	returns its right element when x is a pair
`CONSP`(x)	returns true when x is a pair, false otherwise

We call S-expressions that are in the form of `CONS`(x_1,`CONS`(x_2,...,`CONS`(x_n,`NIL`)...)) lists, and denote them as $[x_1, x_2 \ldots, x_n]$.

(1) Define a function `app`(x,y) that concatenates two lists, where the concatenated list of $[x_1, \ldots, x_n]$ and $[y_1, \ldots, y_m]$ is $[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$. For example, `app`($[1,[2]]$,$[[3,4],5]$) $= [1,[2],[3,4],5]$.

(2) The following `f`(x) is a function defined on S-expressions. Write the result of `f`($[[1,2],[3],[[4],5]]$).

```
def f(x)
  if CONSP(x) then
    return app(f(LEFT(x)),f(RIGHT(x)))
  elsif x == NIL then
    return NIL
  else
    return CONS(x,NIL)
  end
end
```

(3) The following `m`(n) is a function definition on non-negative integers. Let s_n be the S-expression created by `m`(n). Calculate the number of the `CONS` operations performed by `f`(s_n).

```
def m(n)
  if n == 0 then
    return NIL
  else
    return CONS(m(n-1),0)
  end
end
```

(4) Define a function that computes the same result as `f`(x), yet performs only $O(n)$ `CONS` operations for x that contains n integer elements. You may not use data structures other than S-expressions in the definition.

問 9

十分大きいメインメモリと，以下のような一層のキャッシュメモリ（以下，キャッシュ）を持つ計算機を考える．

- キャッシュの容量は $2^{13} = 8192$ バイトである．
- キャッシュブロック（キャッシュラインと同義）のサイズは $2^5 = 32$ バイトである．なお，メインメモリとキャッシュの間のデータ複製は，キャッシュブロック単位で行われる．
- ダイレクトマップ方式を使うとする．
- このキャッシュはデータキャッシュであり，実行命令の読み込み動作はこのキャッシュに影響しない．

この計算機上で，下記の 2 つの C 言語の関数 f1 と f2 をそれぞれコンパイルして実行する．

```
double f1(double A[4096][4096]) {
  int i, j;
  double s = 0.0;
  for (i = 0; i < 4096; i++) {
    for (j = 0; j < 4096; j++) {
      s += A[i][j];
    }
  }
  return s;
}
```

```
double f2(double A[4096][4096]) {
  int i, j;
  double s = 0.0;
  for (j = 0; j < 4096; j++) {
    for (i = 0; i < 4096; i++) {
      s += A[i][j];
    }
  }
  return s;
}
```

以下の仮定を置く．

- double データ型のサイズは 8 バイトである．
- 二次元配列中の要素は次ページの図に示すようにメインメモリ上に格納されるとする．
- 配列 A の先頭アドレスは 32 の倍数とする．
- 局所変数 i，j，s および A の先頭アドレスの値はレジスタにあると仮定し，それらへのアクセスはメモリアクセスを伴わない．
- 各関数の実行開始時には，キャッシュは空（全キャッシュブロックは無効）とする．

以下の問に答えよ．

(1) A[0][0] が初めて読まれたときに，同時にキャッシュに複製される A の要素を列挙せよ．

(2) f1 および f2 を実行した際のキャッシュミス率をそれぞれ答えよ．

(3) (2) において f1 と f2 のキャッシュミス率が異なる理由を簡潔に述べよ．その際,「時間的局所性」もしくは「空間的局所性」のいずれかの用語を説明に含めること．

（次ページへ続く）

(4) `A[0][0]` を含むキャッシュブロックがキャッシュに存在する時，それは `A` の他の要素へのアクセスによりキャッシュから追い出される．そのような `A` の要素を，`f1` および `f2` のそれぞれについて答えよ．複数回追い出される時は，すべての組を答えよ．

アドレス (16 進数)	要素
100000	B[0][0]
100008	B[0][1]
100010	B[0][2]
100018	B[0][3]
100020	B[1][0]
100028	B[1][1]
100030	B[1][2]
100038	B[1][3]
100040	B[2][0]
100048	B[2][1]
100050	B[2][2]
100058	B[2][3]
100060	B[3][0]
100068	B[3][1]
100070	B[3][2]
100078	B[3][3]

`double B[4][4]` で宣言される二次元配列の要素のメインメモリ上の配置．
`B` の先頭アドレスは 16 進数で 100000 とする．

Problem 9

Consider a computer that has sufficiently large main memory and a single level of cache memory (cache, hereafter) as follows.

- The cache capacity is $2^{13} = 8192$ bytes.
- The size of a cache block (also called a cache line) is $2^5 = 32$ bytes. Note that data transfer between the main memory and the cache is done in units of cache blocks.
- The direct mapping method is used.
- The cache is a data cache, which is not affected by fetching of executed instructions.

Two functions `f1` and `f2` below written in C language are compiled and executed on this computer.

```
double f1(double A[4096][4096]) {
  int i, j;
  double s = 0.0;
  for (i = 0; i < 4096; i++) {
    for (j = 0; j < 4096; j++) {
      s += A[i][j];
    }
  }
  return s;
}
```

```
double f2(double A[4096][4096]) {
  int i, j;
  double s = 0.0;
  for (j = 0; j < 4096; j++) {
    for (i = 0; i < 4096; i++) {
      s += A[i][j];
    }
  }
  return s;
}
```

We assume the followings.

- The size of `double` data type is 8 bytes.
- Elements in a two dimensional array are stored in the main memory as in the figure on the next page.
- The start address of the array `A` is a multiple of 32.
- Local variables `i`, `j`, `s` and the start address of the array `A` are stored on registers. Therefore accesses to them do not cause memory accesses.
- When execution of each function is started, the cache is empty (all cache blocks are invalid).

Answer the following questions.

(1) List the elements of `A` that are copied to the cache simultaneously, when `A[0][0]` is read for the first time.

(2) Calculate cache miss ratios of execution of `f1` and `f2`, respectively.

(Continued on the next page)

(3) Explain briefly why cache miss ratios of `f1` and `f2` are different. The explanation has to include either of “temporal locality” or “spatial locality”.

(4) When the cache block that includes `A[0][0]` is on the cache, it will be evicted by subsequent access to another element of `A`. List such elements for `f1` and `f2`, respectively. If the cache block is evicted for multiple times, list all the elements.

Address in hexadecimal	Element
100000	B[0][0]
100008	B[0][1]
100010	B[0][2]
100018	B[0][3]
100020	B[1][0]
100028	B[1][1]
100030	B[1][2]
100038	B[1][3]
100040	B[2][0]
100048	B[2][1]
100050	B[2][2]
100058	B[2][3]
100060	B[3][0]
100068	B[3][1]
100070	B[3][2]
100078	B[3][3]

Memory layout of elements of a two-dimensional array declared by `double B[4][4]`.
Here the start address of array `B` is 100000 in hexadecimal.