専門科目 (午前)　　2023　大修

数理・計算科学

Mathematical and Computing Science

時間 午前 9 時 00 分 – 午後 12 時 30 分

Time 9:00AM – 12:30PM

注意事項

1. 問 A, 問 B, 問 C より 2 問を選択し解答せよ.
2. 問 1〜問 9 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙の試験科目名欄に数理・計算科学系と記入せよ.
5. すべての解答用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ.
6. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ．その際，解答用紙の右上に問題番号を記入せよ.
7. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

Instruction

1. Solve 2 problems out of Problems A, B, and C.
2. Solve 3 problems out of Problems 1 to 9.
3. Note that if you solved more problems than specified above, problems you solved might not be scored.
4. Write Mathematical and Computing Science in the designated place of each answer sheet.
5. Write your examinee number in the designated place of each answer sheet.
6. Use one answer sheet per problem and write the problem number at the upper right corner of the answer sheet.
7. You may use the other side of the answer sheet, but in that case you should indicate that, for example, by writing “continue to the other side.”

問 A

n $(n \geq 3)$ を整数とし, 複素数を成分とする $n \times n$ 行列全体の集合を M_n とする. M_n の元で零行列と単位行列をそれぞれ O, I と書く. M_n の元 A が $A^2 \neq O$, $A^3 = O$ を満たすとし, M_n の元 X を

$$X = I + A + 2A^2$$

により定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の行列 B について B^2 と B^3 を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) M_n を複素ベクトル空間であると考えるとき, I, A, A^2 が線形独立であることを示せ.

(3) X の固有値はすべて 1 であることを示せ.

(4) X の逆行列を I, A, A^2 の線形和で表せ.

Problem A

Let n ($n \geq 3$) be an integer and M_n be the set of all $n \times n$ matrices whose entries are complex numbers. Let O and I be the zero and the identity matrices in M_n, respectively. Assume that an element A in M_n satisfies $A^2 \neq O$ and $A^3 = O$ and an element X in M_n is defined by

$$X = I + A + 2A^2.$$

Answer the following questions.

(1) Let B be the following matrix. Find B^2 and B^3.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Consider M_n as a complex vector space, and show that I, A, and A^2 are linearly independent.

(3) Show that all eigenvalues of X are 1.

(4) Represent the inverse matrix of X by a linear sum of I, A, and A^2.

問 B

区間 $[a,b]$ $(b>a)$ を含むある開区間 I 上で定義された n 回 $(n \geq 5)$ 微分可能な関数 $f(x)$ に対して以下の問いに答えよ.

(1)

$$R_n(x) = f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

とおく．ただし，$f^{(i)}$ は関数 f の i 次の導関数を表す．このとき, テイラーの定理により $\xi \in (a,b)$ が存在して

$$R_n(b) = \frac{f^{(n)}(\boxed{\mathrm{A}})}{n!}(\boxed{\mathrm{B}} - a)^n$$

と書ける．この 2 つの枠 $\boxed{\mathrm{A}}$ と $\boxed{\mathrm{B}}$ それぞれについて，中に入れるべき文字を解答用紙に記せ.

(2) まず

$$u(x) = \frac{x-a}{6}, \quad v(x) = f(a) + 4f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f(x)$$

とおき，J を

$$J(x) = \int_a^x f(t)dt - u(x)v(x) \qquad (x \in I)$$

で定義される関数とするとき，(1) を用いて

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) + \frac{J^{(5)}(\xi)}{5!}(b-a)^5$$

を満たす $\xi \in (a,b)$ が存在することを示せ.

(3) 特に $f(x)$ が 3 次の多項式のときは，等式

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

が成り立つことを示せ.

Problem B

Let $f(x)$ be an n times differentiable ($n \geq 5$) function defined on an open interval I containing the closed interval $[a, b]$ ($b > a$). Answer the following questions.

(1) We set

$$R_n(x) = f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i,$$

where $f^{(i)}$ denotes the i-th derivative of f. Then Taylor's theorem asserts that there exists $\xi \in (a, b)$ such that

$$R_n(b) = \frac{f^{(n)}(\boxed{\text{A}})}{n!}(\boxed{\text{B}} - a)^n$$

holds. Write down the letter in your answer sheet that applies to each of the above two frames $\boxed{\text{A}}$ and $\boxed{\text{B}}$.

(2) Let

$$u(x) = \frac{x-a}{6}, \quad v(x) = f(a) + 4f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f(x),$$

and let J be the function defined by

$$J(x) = \int_a^x f(t)dt - u(x)v(x) \qquad (x \in I).$$

Using the fact given in (1), show the existence of $\xi \in (a, b)$ satisfying

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + \frac{J^{(5)}(\xi)}{5!}(b-a)^5.$$

(3) In particular, when $f(x)$ is a polynomial of degree 3, show the equality

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

問 C

以下では正の整数 $\mathbb{Z}^+$ から正の実数 $\mathbb{R}^+$ への関数だけを考える．関数 f, g に対して，

$$\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \ [n \geq n_0 \text{ ならば } f(n) \leq c \cdot g(n)]$$

であるとき，

$$f(n) = O(g(n))$$

と定義する．また，関数 f, g に対して，

$$\forall c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \ [n \geq n_0 \text{ ならば } f(n) > c \cdot g(n)]$$

であるとき，

$$f(n) = \omega(g(n))$$

と定義する．
以下の (1)，(2)，(3) の命題それぞれについて，真であるか偽であるかを答え，定義にしたがってその証明を与えよ．

(1) $n^2 \log_2 n = \omega(n^2)$ である．ここでは，$n \geq 2$ を考える．

(2) 任意の関数 f, g に対して，$f(n) = O(g(n))$ または $f(n) = \omega(g(n))$ である．

(3) 関数 f, g として，$f(n) = O(g(n))$ かつ $f(n) = \omega(g(n))$ であるものは存在しない．

Problem C

In the following, we only consider functions that map positive integers $\mathbb{Z}^+$ into positive real numbers $\mathbb{R}^+$. For functions f and g, we write

$$f(n) = O(g(n))$$

if and only if

$$\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \ [n \geq n_0 \text{ implies } f(n) \leq c \cdot g(n)].$$

Also, we write

$$f(n) = \omega(g(n))$$

if and only if

$$\forall c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \ [n \geq n_0 \text{ implies } f(n) > c \cdot g(n)].$$

For each of the following propositions (1), (2), and (3), answer whether the proposition is true or false, and prove it according to the definitions.

(1) It holds that $n^2 \log_2 n = \omega(n^2)$. Here, we consider the case that $n \geq 2$.

(2) For any functions f and g, either $f(n) = O(g(n))$ or $f(n) = \omega(g(n))$.

(3) There exists no pair of functions f and g such that $f(n) = O(g(n))$ and $f(n) = \omega(g(n))$.

問 1

$n \geq 1$ を自然数，$g(n)$ を n 次対称群 S_n の元のうち，偶置換であるものの位数の最小公倍数とする．つまり

$$g(n) = \mathrm{LCM}(\{\mathsf{ord}(w) \mid w \in S_n,\ w \text{ は偶置換 }\})$$

である（ただし有限群 G とその元 $h \in G$ について，その位数 $\mathsf{ord}(h)$ とは，h^m が単位元となる最小の自然数 $m \geq 1$ である）．このとき以下の設問に答えよ．

(1) $g(3)$ を求めよ．

(2) 以下の主張を証明または反証せよ．

S_3 は巡回群である．

(3) S_4 の共役類の個数を求めよ．

(4) $g(5)$ を求めよ．

Problem 1

For an integer $n \geq 1$, let $g(n)$ be the least common multiple of the orders of the even permutations of the symmetric group S_n of degree n, i.e.,

$$g(n) = \mathrm{LCM}(\{\mathsf{ord}(w) \mid w \in S_n,\ w \text{ is an even permutation}\}).$$

Recall that, for a finite group G, the order $\mathsf{ord}(h)$ of an element $h \in G$ is the smallest positive integer $m \geq 1$ such that h^m is equal to the identity. Answer the following questions.

(1) Find $g(3)$.

(2) Prove or disprove the following statement.

S_3 is a cyclic group.

(3) Find the number of the conjugacy classes of S_4.

(4) Find $g(5)$.

問 2

X を位相空間とし，S をその部分集合とするとき，S を含む閉集合すべての共通部分を $\overline{S}$ と記し S の閉包という．以下の閉包に関する４つの主張のうち，１つを除き残りは偽である．どの主張が真であるかを述べ，それぞれについて真のときは証明を，偽のときは反例を与えよ．

(1) A, B を X の部分集合とするとき，$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ が成り立つ．

(2) A, B を X の部分集合とするとき，$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$ が成り立つ．

(3) $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の部分集合の族とするとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{C_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n}$$

が成り立つ．

(4) X には，位相と両立する距離関数 d が与えられているとし，

$$B(a, r) = \{x \in X\,;\, d(a, x) < r\}$$

により，点 $a \in X$ を中心とし，$r(> 0)$ を半径とする開球体を定義するとき

$$\overline{B(a, r)} = \{x \in X\,;\, d(a, x) \leq r\}$$

が成り立つ．

Problem 2

Let X be a topological space and S be its subset. The intersection of all closed sets containing S is denoted by $\overline{S}$ and is called the closure of S. In the following four assertions, all but one are false. State which claim is true, and give a proof for each claim if it is true, and a counterexample if it is false.

(1) If A, B are subsets of X, then $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ holds.

(2) If A, B are subsets of X, then $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$ holds.

(3) If $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a family of subsets of X, then

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{C_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n}$$

holds.

(4) Let d be a metric on X which is compatible with the topology of X. Then the open ball

$$B(a, r) = \{x \in X \,;\, d(a, x) < r\}$$

centered at $a \in X$ with radius $r(> 0)$ satisfies

$$\overline{B(a, r)} = \{x \in X \,;\, d(a, x) \leq r\}.$$

問 3

実直線 $\mathbb{R}$ 上の有界な実数値連続関数 f に対し,

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t) f(y) dy \qquad (x \in \mathbb{R},\ t > 0)$$

と定める．ただし

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

とする．このとき以下の問いに答えよ．なお必要ならば $\int_{\mathbb{R}} G(x,t)dx = 1\ (t > 0)$ であることは証明なしで使ってよい.

(1) G は

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ t > 0)$$

を満たすことを示せ.

(2) $t > 0$ のとき，ルベーグ積分またはリーマンの広義積分の意味で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial G}{\partial t}(x,t) \right| dx$ の値が有限であることを示せ.

(3) u は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ t > 0)$$

を満たすことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{t \to 0+} u(0,t) = f(0)$ であることを示せ．ただし $\displaystyle\lim_{t \to 0+}$ は $t = 0$ における右側極限を表す.

Problem 3

For a real-valued bounded continuous function f over the real line $\mathbb{R}$, define

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t) f(y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R},\ t > 0),$$

where we set

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Answer the following questions. Here the fact that $\int_{\mathbb{R}} G(x,t)dx = 1$ $(t > 0)$ can be used without the proof, if necessary.

(1) Show that G satisfies

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ t > 0).$$

(2) For $t > 0$, show that the value of $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial G}{\partial t}(x,t) \right| dx$ is finite in the sense of the Lebesgue integral or the Riemann improper integral.

(3) Show that u satisfies

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (x \in \mathbb{R},\ t > 0).$$

(4) Show that $\displaystyle\lim_{t \to 0+} u(0,t) = f(0)$. Here $\displaystyle\lim_{t \to 0+}$ denotes the limit from the right at $t = 0$.

問 4

n を 2 以上の整数とし，$\mathbb{R}_{++}$ を正の実数の集合とする．n 次元実ベクトル $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n_{++}$ と正の実数 $b \in \mathbb{R}_{++}$ に対して，線形計画問題 (P) を以下で定める：

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \leq b, \\ & & 0 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1, \ldots, n). \end{array}$$

ここで，$\boldsymbol{y}^\top$ はベクトル $\boldsymbol{y}$ の転置を表す．ベクトル $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ の要素は

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n},$$
$$a_i \leq b \ (i = 1, \ldots, n)$$

を満たすとし，$\sum_{i=1}^{k} a_i \leq b < \sum_{i=1}^{k+1} a_i$ となる添字 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ が存在するとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 線形計画問題 (P) の双対問題 (D) を書け．

(2) 線形計画問題 (P) と (D) それぞれの最適解を求め，これらが最適解であることを双対定理に基づいて確認せよ．

(3) 線形計画問題 (P) の最適値を α とし，整数計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \leq b, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n \end{array}$$

の最適値を $\bar{\alpha}$ とする．このとき $\bar{\alpha} \geq \dfrac{1}{2}\alpha$ を示せ．

Problem 4

Let n be an integer such that $n \geq 2$, and let $\mathbb{R}_{++}$ denote the set of positive real numbers. Consider a linear programming problem (P) defined by

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \leq b, \\ & & 0 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1, \ldots, n), \end{array}$$

where $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $b \in \mathbb{R}_{++}$, and $\boldsymbol{y}^\top$ denotes the transpose of a vector $\boldsymbol{y}$. Assume that the elements of $\boldsymbol{c}$ and $\boldsymbol{a}$ satisfy

$$\begin{array}{l} \dfrac{c_1}{a_1} \geq \dfrac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \dfrac{c_n}{a_n}, \\ a_i \leq b \ (i = 1, \ldots, n), \end{array}$$

and there exists an index $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ such that $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq b < \sum_{i=1}^{k+1} a_i$. Answer the following questions.

(1) Write down the dual problem (D) of (P).

(2) Derive an optimal solution to the problem (P) and an optimal solution to (D), and confirm that they are optimal solutions using the duality theorem.

(3) Let α be the optimal value of the problem (P) and let $\bar{\alpha}$ be the optimal value of the integer linear programming problem

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \leq b, \\ & \boldsymbol{x} \in \{0, 1\}^n. \end{array}$$

Prove $\bar{\alpha} \geq \dfrac{1}{2}\alpha$.

問 5

以下，P を確率とし，$E[X]$ で確率変数 X の期待値を表す.

(1) X が $[-1,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とする．任意の実数 t に対して $E[e^{itX}]$ を計算せよ．ここで i は虚数単位である.

(2) $[0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数 U に対して，その 2 進展開の係数を $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ で表す．すなわち，$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}$$

を満たす $\{0,1\}$-値確率変数列である.

(2-a) 任意の正整数 n と $c_1, \dots, c_n \in \{0,1\}$ に対して,

$$P(X_1 = c_1, \cdots, X_n = c_n) = \frac{1}{2^n}$$

が成り立つことを証明せよ.

(2-b) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = 1/2$ を満たす独立同分布確率変数列であることを示せ.

(3) (1) の結果と (2-b) の事実を用いて，任意の実数 $t \neq 0$ に対して

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{t}{2^n}\right)$$

が成り立つことを示せ.

Problem 5

In the following, P denotes the probability, and $E[X]$ represents the expectation of a random variable X.

(1) Let X be a uniformly distributed random variable on $[-1, 1]$. For any real number t, compute $E[e^{itX}]$, where i denotes the imaginary unit.

(2) For a random variable U having the uniform distribution on $[0, 1)$, let $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ be the coefficients of its binary expansion. Namely, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ is the sequence of $\{0, 1\}$-valued random variables satisfying

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}.$$

(2-a) For any positive integer n and $c_1, \ldots, c_n \in \{0, 1\}$, prove

$$P(X_1 = c_1, \cdots, X_n = c_n) = \frac{1}{2^n}.$$

(2-b) Show that $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of independent and identically distributed random variables satisfying $P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = 1/2$ for any n.

(3) Using the result in (1) and the fact in (2-b), show that for any real number $t \neq 0$

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{t}{2^n}\right).$$

問 6

確率変数 $X, X_1, \ldots, X_n$ は独立に同一の分布にしたがい，その確率密度関数は

$$p(x;\theta_0) = \begin{cases} (\theta_0+1)x^{\theta_0}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられるとする．ここで θ_0 は $\theta_0 > -1$ を満たす定数である．以下の問に答えよ．

(1) $s > -(\theta_0+1)$ を満たす実数 s に対して，X^s の期待値 $\mathbb{E}[X^s]$ を求めよ．

(2) $X_1, \ldots, X_n$ が与えられたとき，統計モデル $p(x;\theta), \theta > -1$ のパラメータ θ に対する最尤推定量 $\widehat{\theta}$ を求めよ．

(3) $\widehat{\theta} \leq 0$ となる確率を $\Pr(\widehat{\theta} \leq 0)$ と表す．$0 < s < n(\theta_0+1)$ を満たす実数 s に対して

$$\Pr(\widehat{\theta} \leq 0) \leq \frac{(\mathbb{E}[X^{-s/n}])^n}{e^s}$$

が成り立つことを証明せよ．

(4) $\theta_0 > 0$ のとき

$$\Pr(\widehat{\theta} \leq 0) \leq \left(\frac{1+\theta_0}{e^{\theta_0}}\right)^n$$

が成り立つことを証明せよ．

Problem 6

Let $X, X_1, \ldots, X_n$ be independent and identically distributed random variables that have the probability density function,

$$p(x;\theta_0) = \begin{cases} (\theta_0+1)x^{\theta_0}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

where θ_0 is a constant such that $\theta_0 > -1$. Answer the following questions.

(1) For a real number s such that $s > -(\theta_0+1)$, find the expectation $\mathbb{E}[X^s]$ of X^s.

(2) Given $X_1, \ldots, X_n$, find the maximum likelihood estimator $\widehat{\theta}$ of the parameter θ for the statistical model $p(x;\theta)$, $\theta > -1$.

(3) Let $\Pr(\widehat{\theta} \leq 0)$ be the probability of $\widehat{\theta} \leq 0$. Show that

$$\Pr(\widehat{\theta} \leq 0) \leq \frac{(\mathbb{E}[X^{-s/n}])^n}{e^s}$$

for all s such that $0 < s < n(\theta_0+1)$.

(4) Prove that

$$\Pr(\widehat{\theta} \leq 0) \leq \left(\frac{1+\theta_0}{e^{\theta_0}}\right)^n$$

as long as $\theta_0 > 0$.

問 7

アルファベット $\{0,1\}$ に対して，以下の言語を考える．

$$L_1 = \{01^n \mid n \geq 0\}$$
$$L_2 = \{0^m10^n \mid m,n \geq 0\}$$
$$L_3 = \{0^m10^n1 \mid m,n \geq 0\}$$

また，言語 L に対して $R(L)$ と $W(L)$ を以下のように定義する．

$$R(L) = \{ww^R \mid w \in L\}$$
$$W(L) = \{ww \mid w \in L\}$$

ただし，w^R は w の逆順とする．例えば，$(011)^R = 110$ である．

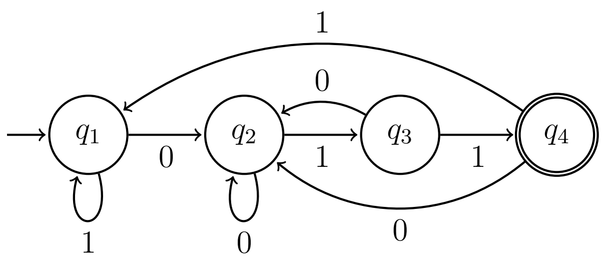
以下の問いに答えよ．

(1) $R(L_1)$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 1) を示せ．

(2) $W(L_2)$ を生成する文脈自由文法を示せ．

(3) $W(L_3)$ が文脈自由言語でないことをポンピング補題 (注 2) を用いて示せ．

注 1: 状態遷移図
以下は，アルファベット $\{0,1\}$ 上の言語 $\{w \mid w$ は 011 で終わる $\}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態は q_4 である．



注 2: ポンピング補題
言語 L が文脈自由言語であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

> w が $|w| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，w は次の条件を満たすように 5 つの部分 $w = uvxyz$ に分割できる．
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $uv^ixy^iz \in L$
> 2. $|vy| > 0$
> 3. $|vxy| \leq p$

Problem 7

For the alphabet $\{0, 1\}$, let us consider the following languages.

$$L_1 = \{01^n \mid n \geq 0\}$$
$$L_2 = \{0^m10^n \mid m, n \geq 0\}$$
$$L_3 = \{0^m10^n1 \mid m, n \geq 0\}$$

For a language L, we then define $R(L)$ and $W(L)$ as follows:

$$R(L) = \{ww^R \mid w \in L\}$$
$$W(L) = \{ww \mid w \in L\}$$

where w^R is the reversal of w. For example, $(011)^R = 110$.

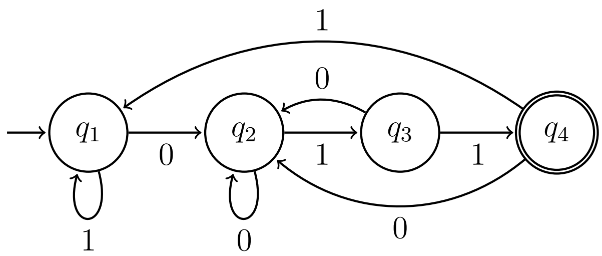
Answer the following questions.

(1) Give a state transition diagram of a deterministic finite automaton (Note 1) that recognizes $R(L_1)$.

(2) Give a context-free grammar that generates $W(L_2)$.

(3) Show that $W(L_3)$ is not context-free by using the pumping lemma (Note 2).

Note 1: State transition diagram
The following is an example of a state transition diagram of a deterministic finite automaton that recognizes the language $\{w \mid w \text{ ends with } 011\}$ over the alphabet $\{0, 1\}$, where q_1 is the start state and q_4 is an accept state.



Note 2: The pumping lemma
If L is a context-free language, then there exists a number p (the pumping length) such that

> for any string w in L such that $|w| \geq p$, we can divide w into five pieces, $w = uvxyz$, satisfying the following conditions.
>
> 1. for each $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in L$,
> 2. $|vy| > 0$, and
> 3. $|vxy| \leq p$.

問 8

正の奇数 x, y が $x \geq y$ を満たすとき，数のペアの列 $\{(b_n, c_n)\}_{n=1,2,\dots}$ を

$$
\begin{aligned}
&b_1 = x\\
&c_1 = y\\
&b_n = \max\{\phi(b_{n-1} - c_{n-1}), c_{n-1}\}, \qquad n \geq 2 \text{ のとき}\\
&c_n = \min\{\phi(b_{n-1} - c_{n-1}), c_{n-1}\}, \qquad n \geq 2 \text{ のとき}
\end{aligned}
$$

と定義する．ただし，非負の整数 t について $\phi(t)$ を

$$
\phi(t) = \begin{cases} \phi(t/2), & t \text{ が正の偶数のとき} \\ t, & \text{それ以外のとき} \end{cases}
$$

と再帰的に定義する．また，$c_n = 0$ となったとき，数のペアの列はそこで終了する．例えば $x = 7$, $y = 3$ のとき $(b_1, c_1) = (7, 3)$, $(b_2, c_2) = (3, 1)$, $(b_3, c_3) = (1, 1)$, $(b_4, c_4) = (1, 0)$ となる．このとき，列 $\{(b_n, c_n)\}_{n=1,2,\dots}$ の長さは 4 である．

(1) $x = 147$, $y = 93$ のとき，列 $\{(b_n, c_n)\}_{n=1,2,\dots}$ を示せ．例えば $x = 7$, $y = 3$ のときは $(7, 3)$, $(3, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ と解答すればよい．

(2) 任意の $n \geq 1$ について，(b_{n+1}, c_{n+1}) が存在するならば，b_n と c_n の最大公約数と b_{n+1} と c_{n+1} の最大公約数が等しいことを示せ．ただし，0 と任意の非負整数 m の最大公約数は m とする．

(3) 任意の $n \geq 1$ について，(b_{n+1}, c_{n+1}) が存在するならば，$b_{n+1} + c_{n+1} \leq (b_n + c_n)/2$ であることを示せ．

(4) ある二つの正の奇数 x と y が $x \geq y$ を満たし，長さ 9 の列 $\{(b_n, c_n)\}_{n=1,2,\dots}$ を生成した．このとき x としてあり得る値の最小値を示せ．

Problem 8

For positive odd integers x and y satisfying $x \geq y$, a sequence $\{(b_n, c_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ of pairs of integers is defined by

$$\begin{aligned} b_1 &= x \\ c_1 &= y \\ b_n &= \max\{\phi(b_{n-1} - c_{n-1}), c_{n-1}\}, \qquad \text{if } n \geq 2 \\ c_n &= \min\{\phi(b_{n-1} - c_{n-1}), c_{n-1}\}, \qquad \text{if } n \geq 2 \end{aligned}$$

where the function $\phi(t)$ is recursively defined as

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi(t/2), & \text{if } t \text{ is a positive even integer} \\ t, & \text{otherwise} \end{cases}$$

for non-negative integer t. If $c_n = 0$, the sequence of the pairs of integers terminates. For example, when $x = 7$ and $y = 3$, the sequence is $(b_1, c_1) = (7, 3)$, $(b_2, c_2) = (3, 1)$, $(b_3, c_3) = (1, 1)$ and $(b_4, c_4) = (1, 0)$. In this case, the length of the sequence $\{(b_n, c_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ is 4.

(1) For $x = 147$ and $y = 93$, show the sequence $\{(b_n, c_n)\}_{n=1,2,\ldots}$. For example, you should answer $(7, 3), (3, 1), (1, 1), (1, 0)$ if $x = 7$ and $y = 3$.

(2) Prove the following statement:

> For any $n \geq 1$, if (b_{n+1}, c_{n+1}) exists, the greatest common divisor of b_n and c_n is equal to the greatest common divisor of b_{n+1} and c_{n+1}.

Here, the greatest common divisor of zero and arbitrary non-negative integer m is defined as m.

(3) Prove that for any $n \geq 1$, if (b_{n+1}, c_{n+1}) exists, $b_{n+1} + c_{n+1} \leq (b_n + c_n)/2$.

(4) For positive odd integers x and y satisfying $x \geq y$, assume that x and y generate a sequence $\{(b_n, c_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ of length 9. Show the minimum possible value for x.

問 9

$k > 0$ 個の正整数 $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ が与えられたとき, $n_0 : n_1 : \cdots : n_{k-1}$ の比率の確率で $0, 1, \ldots, k-1$ を生成する乱数生成器を作成したい. 与えられた正整数 m について m 未満の非負整数を一様な確率で生成する乱数生成器 `rand(m)` が利用できるとする.
解答にあたってコードを記述するときは好みのプログラミング言語風の擬似コードを使用してよい.

(1) 以下の乱数生成器が $0, 1, 2, 3, 4$ を生成する確率をそれぞれ答えよ.

```
A = [0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4]
def sample()
    return A[rand(A.length)]
end
```

(2) 前問の方式を一般化して, 事前に長さ $n_0 + n_1 + \cdots + n_{k-1}$ の配列を 1 個準備すれば, 乱数をひとつ生成するためにこの配列を 1 回アクセスするような乱数生成器を作れる. この方式で配列を初期化するコードと乱数生成器のコードを記述せよ.

(3) 正整数 N と非負整数 $n'_0, n'_1, \ldots, n'_{k-1}$ を用いて

$$n_0 = N \cdot n'_0 + 1, \quad n_1 = N \cdot n'_1 + 1, \quad \ldots, \quad n_{k-1} = N \cdot n'_{k-1} + 1$$

と表せるとする. 前問の方式に工夫を加え, 事前に長さ $n'_0 + n'_1 + \cdots + n'_{k-1}$ の配列を 1 個準備すれば, 乱数をひとつ生成するためにこの配列を高々1 回アクセスするような乱数生成器を作れる. この方式の実現法の概要を説明せよ.

(4) 任意の $i = 0, 1, \ldots, k-1$ について $n_i \leq N^2$ を満たす正整数 N を考える. 事前に長さが高々$N \cdot k$ の配列を 2 個準備すれば, 乱数をひとつ生成するためにいずれかの配列を 1 回アクセスするような乱数生成器を作れる. この方式における各配列の中身を説明し, 乱数生成器のコードを記述せよ.

Problem 9

Given positive integers $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ ($k > 0$), we would like to make random number generators that generate an integer from $0, 1, \ldots, k-1$ with probabilities given by the ratio $n_0 : n_1 : \cdots : n_{k-1}$. You may use a random number generator `rand(m)` that generates an integer from $0, 1, \ldots, m-1$, uniformly.
For answering the following questions, you may use pseudo code in a style of your favorite programming language.

(1) Answer the probabilities that the following random number generator generates 0, 1, 2, 3, and 4, respectively.

```
A = [0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4]
def sample()
    return A[rand(A.length)]
end
```

(2) By generalizing the previous method, we can prepare an array of length $n_0 + n_1 + \cdots + n_{k-1}$, and make the aforementioned random number generator that accesses the array once for each random number generation. Describe the code to initialize the array and the code of the random number generator.

(3) Let N be a positive integer and $n'_0, n'_1, \ldots, n'_{k-1}$ be non-negative integers that satisfy

$$n_0 = N \cdot n'_0 + 1, \quad n_1 = N \cdot n'_1 + 1, \quad \ldots, \quad n_{k-1} = N \cdot n'_{k-1} + 1.$$

By modifying the previous method, we can prepare an array of length $n'_0 + n'_1 + \cdots + n'_{k-1}$ and make the aforementioned random number generator that accesses the array at most once for each random number generation. Outline the implementation of this strategy.

(4) Assume that a positive integer N satisfies $n_i \leq N^2$ for $i = 0, 1, \ldots, k-1$. We can prepare two arrays whose lengths are at most $N \cdot k$, and make the aforementioned random number generator that accesses one of the arrays once for each random number generation. Explain the contents of the arrays and describe the code of the random number generator.