専門科目 (午前)　　2024　大修

数理・計算科学

Mathematical and Computing Science

時間 午前 9 時 00 分 – 午後 12 時 30 分

Time 9:00AM – 12:30PM

注意事項

1. 問 A, 問 B, 問 C より 2 問を選択し解答せよ.
2. 問 1〜問 9 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. 各解答用紙の受験番号欄に受験番号，試験科目名欄に問題番号を必ず記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

Instruction

1. Solve 2 problems out of Problems A, B, and C.
2. Solve 3 problems out of Problems 1 to 9.
3. Note that if you solved more problems than specified above, problems you solved might not be scored.
4. Write your examinee number in the column “受験番号” and the problem number in the column “試験科目名” for each answer sheet.
5. Use one answer sheet per problem.
6. You may use the other side of the answer sheet, but in that case you should indicate that, for example, by writing “continue to the other side.”

問 A

$\mathbb{R}^3$ を実ベクトル空間とし，a を実数とする．行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a^2+5a+6 \\ 6a+6 \\ 2a^2+4a+6 \end{pmatrix}$$

とする．ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, および $\boldsymbol{v}_3$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ が線形独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, および $\boldsymbol{v}_3$ の線形結合で表せ．

(3) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, および $\boldsymbol{v}_3$ が $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルであることを示し，それぞれの固有値を求めよ．

(4) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}$ とする．$\boldsymbol{B}$ の階数 (rank) を a の関数として表せ.

(5) $\boldsymbol{B}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ が存在するとき，$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{u}$ を求めよ．

Problem A

Let $\mathbb{R}^3$ be a real vector space and a be a real number. A matrix $\boldsymbol{A}$ and a vector $\boldsymbol{u}$ are defined respectively by

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a^2 + 5a + 6 \\ 6a + 6 \\ 2a^2 + 4a + 6 \end{pmatrix}.$$

Vectors $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, and $\boldsymbol{v}_3$ are defined respectively by

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(1) Show that $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ is linearly independent.

(2) Represent $\boldsymbol{u}$ as a linear combination of $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, and $\boldsymbol{v}_3$.

(3) Show that $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, and $\boldsymbol{v}_3$ are eigenvectors of $\boldsymbol{A}$, and find the respective eigenvalues.

(4) Let $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}$. Represent the rank of $\boldsymbol{B}$ as a function of a.

(5) When the inverse matrix $\boldsymbol{B}^{-1}$ of $\boldsymbol{B}$ exists, find $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{u}$.

問 B

次で定義される $\mathbb{R}^2$ 内の部分集合を考える.

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x + y \leq 1,\ 0 \leq x - y \leq 1,\ y \leq 0\}$$

以下の問いに答えよ.

(1) D を (x, y)-平面に図示し, さらに変数変換 $u = x + y, v = x - y$ によって D が写る先を (u, v)-平面に図示せよ.

(2) 広義積分 $\iint_D (x + y)^a dxdy$ が収束するような実数 a の範囲とその時の積分の値を求めよ.

Problem B

Consider the subset of $\mathbb{R}^2$ defined as follows.

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x + y \le 1,\ 0 \le x - y \le 1,\ y \le 0\}$$

Answer the following questions.

(1) Plot the region D on the (x, y)-plane, and further, depict the image of D under the variable transformation $u = x + y, v = x - y$ on the (u, v)-plane.

(2) Find the range of real numbers a for which the improper integral $\iint_D (x + y)^a dxdy$ converges, and determine the value of the integral for those values of a.

問 C

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とする．以下では A, B などは $\mathbb{N}$ の部分集合を表し，f, f_A, f_B, r は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への関数を表す．

集合 A に対して，以下で定義される関数 f_A のことを A の特性関数と呼ぶ．

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

関数 f が計算可能であるとは，f を計算するアルゴリズムが存在することである．集合 A が決定可能であるとは，A の特性関数が計算可能であることである．

集合 A, B の特性関数をそれぞれ f_A, f_B とする．以下を満たす計算可能な関数 r が存在することを，A は B に還元可能であるという．

$$f_A(x) = f_B(r(x))$$

以下の命題がそれぞれ真であるか偽であるかを答えよ．そして真である場合は証明し，真でない場合は反例を挙げて偽であることを証明せよ．決定可能でない集合の存在を使用してもよい．

(1) もし A と B が共に決定可能ならば，$A \cup B$ は決定可能である．

(2) もし $A \cup B$ が決定可能ならば，A と B の少なくとも一方は決定可能である．

(3) もし $A_0, A_1, A_2, \ldots$ のすべてが決定可能ならば，それらの和集合 $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ は決定可能である．

(4) もし A が決定可能で A が B に還元可能であるならば，B は決定可能である．

Problem C

Let $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. In the following, $A, B, \ldots$ denote subsets of $\mathbb{N}$; and f, f_A, f_B, and r denote functions from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N}$.

For a set A, the function f_A defined below is called the characteristic function of A.

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & (\text{if } x \in A) \\ 0 & (\text{if } x \notin A) \end{cases}$$

We say that a function f is computable if there is an algorithm that computes f. We say that a set A is decidable if the characteristic function of A is computable.

Let f_A and f_B be the characteristic functions of sets A and B, respectively. We say that A is reducible to B if there is a computable function r such that

$$f_A(x) = f_B(r(x)).$$

Answer whether each of the following propositions is true or false. If it is true, prove it. If it is not true, give a counterexample to prove that it is false. You may use the existence of a set that is not decidable.

(1) If both A and B are decidable, then $A \cup B$ is decidable.

(2) If $A \cup B$ is decidable, then at least one of A and B is decidable.

(3) If all of $A_0, A_1, A_2, \ldots$ are decidable, then the union $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ is decidable.

(4) If A is decidable and A is reducible to B, then B is decidable.

問 1

$\mathbb{R}^2$ を 2 次元実数ベクトル空間，$GL_2(\mathbb{R})$ を 2 次正方実可逆行列のなす群とする．$A \in GL_2(\mathbb{R})$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ について，写像 $f_{A,\boldsymbol{b}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f_{A,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

と定める（ここで $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$）．以下の問いに答えよ．

(1) $G = \{f_{A,\boldsymbol{b}} \mid A \in GL_2(\mathbb{R}), \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2\}$ は，写像の合成によって群になることを示せ．

(2) $H = \{f_{E,\boldsymbol{b}} \mid \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2\}$ は，G の正規部分群であることを示せ．ここで，E は 2 次単位行列である．

(3) 剰余群 G/H が可換群であるかどうか，理由と共に答えよ．

Problem 1

Let $\mathbb{R}^2$ be the two dimensional real vector space and let $GL_2(\mathbb{R})$ be the group of 2×2 real invertible matrices. For $A \in GL_2(\mathbb{R})$ and $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$, we define a map $f_{A,\boldsymbol{b}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ by

$$f_{A,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},$$

where $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Answer the following questions.

(1) Prove that $G = \{f_{A,\boldsymbol{b}} \mid A \in GL_2(\mathbb{R}), \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2\}$ is a group by composition of maps.

(2) Prove that $H = \{f_{E,\boldsymbol{b}} \mid \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2\}$ is a normal subgroup of G. Here, E is the 2×2 unit matrix.

(3) Answer with reasons whether the quotient group G/H is commutative or not.

問 2

位相空間が距離付け可能とは，同じ位相を与える距離がその空間上に存在することをいう．ウリゾーンの距離付け定理は,「第 2 可算公理を満たす正則な位相空間は距離付け可能である」ということを主張している．

- 位相空間が第 2 可算公理を満たすとは，その位相が高々可算な基をもつことをいう．
- 位相（または開集合系）の基とは，開集合の族 $\mathcal{V}$ で，任意の開集合が $\mathcal{V}$ のある部分族の和集合に等しいようなものである．
- 位相空間が正則であるとは，任意の 1 点集合 $\{x\}$ が閉集合であり，任意の閉集合 F と F に含まれない点 x に対して，$x \in U$, $F \subset V$, かつ $U \cap V = \varnothing$ となる開集合 U, V が存在することをいう．

非可算集合 X 上の離散位相について，以下の問いに答えよ．

(1) 空間 X はウリゾーンの距離付け定理の仮定を満たしているか否かを証明つきで判定せよ．

(2) 空間 X が距離付け可能であるか否かを証明つきで判定せよ．

Problem 2

A topological space is said to be metrizable if there exists a metric on the space giving the same topology. Urysohn's metrization theorem asserts that every second-countable regular topological space is metrizable.

- A topological space is said to be second-countable if its topology has an at most countable base.
- A base for the topology, or the system of open sets, is a family $\mathcal{V}$ of open sets such that every open set is equal to the union of some sub-family of $\mathcal{V}$.
- A topological space is said to be regular if every singleton set $\{x\}$ is closed and for every closed set F and a point x not contained in F there exist open sets U and V such that $x \in U$, $F \subset V$, and $U \cap V = \varnothing$.

Answer the following questions concerning the discrete topology on an uncountable set X.

(1) Determine, with proof, whether or not the space X satisfies the assumptions of Urysohn's metrization theorem.

(2) Determine, with proof, whether or not the space X is metrizable.

問 3

$[0,1] \times [0,\infty)$ で定義された C^2 級関数 $u(x,t)$ が

$$\begin{cases} u_t + u = u_{xx} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

をみたすとする．以下の問いに答えよ．

(1) $v = e^t u$ とおくとき，v のみたす方程式を求めよ．

(2) $t \to \infty$ のとき $u(x,t)$ が定数 0 に一様収束することを示せ．

Problem 3

Let $u(x,t)$ be a C^2 function defined on $[0,1] \times [0,\infty)$ that satisfies

$$\begin{cases} u_t + u = u_{xx} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{cases}$$

Answer the following questions.

(1) Let $v = e^t u$. Determine the equation that v satisfies.

(2) Show that $u(x,t)$ uniformly converges to the constant 0 as $t \to \infty$.

問 4

以下の線形計画問題 (P) を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \max & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}. \end{array}$$

ただし，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ は入力データであり，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数ベクトルである．また，上付き添字の $\top$ はベクトルの転置を表し，ベクトル $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対して $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}$ は成分ごとの不等式を表す．問題 (P) に最適解があると仮定し，以下の問に答えよ．

(1) 入力データが

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

のときの最適解の集合を図示し，全端点の座標も求めよ．ここで，凸集合 S の端点とは，S の点 $\boldsymbol{p}$ で，任意の $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in S$ に対して $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}{2}$ ならば $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$ が成り立つ点のことである．

(2) 一般に (P) の最適解の集合は凸集合であることを示せ．

(3) (P) の最適解 $\boldsymbol{x}$ が (P) の実行可能解 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$ を用いて $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{y}_i$ と表されるとする．ただし k は正の整数であり，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ は正の実数で $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ を満たすとする．このとき，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$ も (P) の最適解であることを示せ．

(4) (P) に最適解は存在するが最適解の集合が端点をもたない入力データ $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ の例をひとつ挙げて，そのような例になっている理由を説明せよ．ただし，例では $n = 2$ とし $\boldsymbol{c}$ は非ゼロベクトルとすること．

Problem 4

Consider a linear programming problem (P) defined by

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \max & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
& \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},
\end{array}
$$

where $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ and $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ are the input data, and $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ is the variable vector. The superscript $\top$ indicates the transpose of a vector, and $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z}$ denotes the element-wise inequality for vectors $\boldsymbol{y}$ and $\boldsymbol{z}$. Assuming that (P) has an optimal solution, answer the following questions.

(1) For the input data

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ and } \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},
$$

draw the set of optimal solutions and compute the coordinates of all the extreme points. Here, an extreme point of a convex set S is a point $\boldsymbol{p}$ in S such that for any $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in S$, if $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}}{2}$ then $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$ holds.

(2) Show that in general, the set of optimal solutions of (P) is a convex set.

(3) Suppose that some optimal solution $\boldsymbol{x}$ of (P) is represented as $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{y}_i$, where k is a positive integer, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$ are feasible solutions of (P), and $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ are positive real numbers satisfying $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Show that $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$ are also optimal solutions of (P).

(4) Give an example of the input data $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ for (P) such that (P) has an optimal solution and the set of optimal solutions has no extreme points, and explain why it is such an example. Here, choose an example such that $n = 2$ and $\boldsymbol{c}$ is a nonzero vector.

問 5

$\mathbb{P}, \mathbb{E}$ はそれぞれ確率，期待値を表すものとする．n を正の整数，$p_1, p_2, \ldots, p_n$ を $(0,1)$ 上の実数として，確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立に，

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i, \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

を満たすものとする．$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ として以下の問に答えよ．

(1) S の期待値 $\mu = \mathbb{E}[S]$ を $p_1, p_2, \ldots, p_n$ を用いて表せ．

(2) t を実数として，S のモーメント母関数 $M(t) = \mathbb{E}[e^{tS}]$ を $p_1, p_2, \ldots, p_n, t$ を用いて表し，任意の $t \in (-\infty, \infty)$ に対して $M(t) \leq \exp\bigl(\mu\,(e^t - 1)\bigr)$ が成り立つことを示せ．

(3) 任意の $a \geq 0,\, t > 0$ に対して $\mathbb{P}(S > a) \leq e^{-at}\, M(t)$ が成り立つことを示せ．

(4) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\mathbb{P}\bigl(S > (1+\epsilon)\,\mu\bigr) \leq e^{-\delta\mu}$ を満たす $\delta > 0$ が存在することを示せ．

Problem 5

Let $\mathbb{P}$ and $\mathbb{E}$ denote a probability and the induced expectation, respectively. Let n be a positive integer and $p_1, p_2, \ldots, p_n$ be real numbers on $(0, 1)$, and suppose that random variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are mutually independent and distributed as

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i, \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Define $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ and answer the following questions.

(1) Express the expectation $\mu = \mathbb{E}[S]$ of S in terms of $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

(2) Let t denote a real number. Express the moment generating function $M(t) = \mathbb{E}[e^{tS}]$ of S in terms of $p_1, p_2, \ldots, p_n$ and t. Furthermore, show that $M(t) \leq \exp\big(\mu\,(e^t - 1)\big)$ for any $t \in (-\infty, \infty)$.

(3) Show that $\mathbb{P}(S > a) \leq e^{-at}\, M(t)$ for any $a \geq 0$ and $t > 0$.

(4) Show that, for any $\epsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that $\mathbb{P}\big(S > (1 + \epsilon)\,\mu\big) \leq e^{-\delta\,\mu}$.

問 6

1 次元確率変数 $X, X_1, \ldots, X_n$ は独立に同一の分布にしたがい，その確率密度関数は

$$p(x;\theta_0) = \begin{cases} \theta_0 e^{-\theta_0 x}, & x > 0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる．ここで θ_0 は正定数である．以下，事象 A の確率を $\mathbb{P}(A)$ と表す．確率変数 Z が期待値 μ，分散 σ^2 の正規分布にしたがうとき $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ と表す．$Z \sim N(0,1)$ と $0 < \alpha < 1/2$ に対して，$z(\alpha)$ を $\mathbb{P}(Z \leq z(\alpha)) = 1 - \alpha$ を満たす値として定義する．
以下の問に答えよ．

(1) X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と分散 $\mathbb{V}[X]$ を求めよ．

(2) $X_1, \ldots, X_n$ が与えられたとき，統計モデル $p(x;\theta)$, $\theta > 0$ における最尤推定量 $\widehat{\theta}_n$ を求めよ．

(3) 次の性質をもつ実数値関数 $h(t), t > 0$ をひとつ求めよ．

確率変数列 $\sqrt{n}(h(1/\widehat{\theta}_n) - h(1/\theta_0)), n = 1, 2, \ldots$ は $n \to \infty$ で $N(0,1)$ に分布収束 (法則収束) する．

次の事実を証明なしに用いてよい．$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ に対して Z_n を $|Z_n - \mathbb{E}[X]| \leq |Y_n - \mathbb{E}[X]|$ を満たす 1 次元確率変数とする．連続な実数値関数 f に対して $\sqrt{n} f(Z_n)(Y_n - \mathbb{E}[X])$ は $n \to \infty$ で $N(0, (f(\mathbb{E}[X]))^2\, \mathbb{V}[X])$ に分布収束する．

(4) θ_0 の漸近的 95% 信頼区間を n, $\widehat{\theta}_n$, $z(\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$ を用いて構成せよ．漸近的 95% 信頼区間とは $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\theta_0 \in [\ell_n,\, u_n]) = 0.95$ を満たす閉区間 $[\ell_n,\, u_n]$ を意味する．

Problem 6

Let $X, X_1, \ldots, X_n$ be independent and identically distributed random variables that have the probability density function,

$$p(x;\theta_0) = \begin{cases} \theta_0 e^{-\theta_0 x}, & x > 0, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

where θ_0 is a positive constant. In the below, $\mathbb{P}(A)$ denotes the probability of the event A. $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ means that the random variable Z has the normal distribution with mean μ and variance σ^2. For $0 < \alpha < 1/2$, $z(\alpha)$ is the real number satisfying $\mathbb{P}(Z \le z(\alpha)) = 1-\alpha$ for $Z \sim N(0,1)$.
Answer the following questions.

(1) Find the expectation $\mathbb{E}[X]$ and the variance $\mathbb{V}[X]$ of X.

(2) Given $X_1, \ldots, X_n$, find the maximum likelihood estimator $\widehat{\theta}_n$ of the parameter θ for the statistical model $p(x;\theta)$, $\theta > 0$.

(3) Find a real-valued function $h(t), t > 0$ having the following property.

> The sequence of random variables, $\sqrt{n}(h(1/\widehat{\theta}_n) - h(1/\theta_0)), n = 1, 2, \ldots,$ converges in distribution to $N(0,1)$ as $n \to \infty$.

The following fact can be used without proof, if necessary. For $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, let Z_n be a one-dimensional random variable such that $|Z_n - \mathbb{E}[X]| \le |Y_n - \mathbb{E}[X]|$. For a continuous real-valued function f, $\sqrt{n} f(Z_n)(Y_n - \mathbb{E}[X])$ converges in distribution to $N(0, (f(\mathbb{E}[X]))^2\, \mathbb{V}[X])$ as $n \to \infty$.

(4) Construct an asymptotic 95% confidence interval of θ_0 with $n, \widehat{\theta}_n$, and $z(\alpha)$, $0 < \alpha < 1/2$. The asymptotic 95% confidence interval means a closed interval $[\ell_n,\, u_n]$ such that $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\theta_0 \in [\ell_n,\, u_n]) = 0.95$ holds.

問 7

アルファベット $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ 上の言語 L_1, L_2, L_3:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i = 1 \text{ ならば } j = k \ \ (i, j, k \geq 0)\} \\
L_2 &= \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k\mathtt{d}^\ell \mid i = j \text{ かつ } k = \ell \ \ (i, j, k, \ell \geq 0)\} \\
L_3 &= \{w \mid w \text{ は } \mathtt{a} \text{ と } \mathtt{b} \text{ を同じ個数含む，かつ，} \mathtt{c} \text{ と } \mathtt{d} \text{ を同じ個数含む}\}
\end{aligned}
$$

を考える．言語 L_1, L_2, L_3 の各々に対して，その言語が文脈自由ならばその言語を生成する文脈自由文法を与えよ．その言語が文脈自由でないならば，ポンピング補題 (注) を用いて，その言語が文脈自由でないことを証明せよ．

注) 文脈自由言語に対するポンピング補題　言語 A が文脈自由ならば，数 p (ポンピング長) が存在し，s が少なくとも長さ p である A の任意の文字列であるときに，s は条件:

1. 任意の $i \geq 0$ に対して，$uv^ixy^iz \in A$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

を満たすように $s = uvxyz$ と 5 分割できる．

Problem 7

Consider the languages L_1, L_2, L_3 on the alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid \text{if } i = 1 \text{ then } j = k \ \ (i, j, k \geq 0)\}, \\
L_2 &= \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k\mathtt{d}^\ell \mid i = j \text{ and } k = \ell \ \ (i, j, k, \ell \geq 0)\}, \text{ and} \\
L_3 &= \{w \mid \text{in } w, \text{the number of } \mathtt{a} \text{ equals the number of } \mathtt{b} \text{ and the number} \\
&\quad\ \text{of } \mathtt{c} \text{ equals the number of } \mathtt{d}\}.
\end{aligned}
$$

For each of the languages L_1, L_2, L_3, if the language is context free, then give a context-free grammar generating it. If the language is not context free, prove that the language is not context free by using the pumping lemma (Note).

Note) The pumping lemma for context-free languages If A is a context-free language, then there exists a number p (the pumping length) where, if s is any string in A of length at least p, then s can be divided into five pieces $s = uvxyz$ satisfying the conditions:

1. For any $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, and
3. $|vxy| \leq p$.

問 8

整数のリストとペアを扱うプログラムについて，(1) から (4) の問いに答えよ．プログラムの中で使用する記法は以下の通りである．

`[]`	空の整数リスト
`[a, b, c]`	a, b, c の 3 つの要素をもつリスト
`head(li)`	リスト `li` の先頭要素
`tail(li)`	リスト `li` から先頭要素を取り除いたリスト
`(a, b)`	第 1 要素が `a`，第 2 要素が `b` のペア
`first(p)`	ペア `p` の第 1 要素
`second(p)`	ペア `p` の第 2 要素

以下の関数 `f` は上記の記法を用いて記述されたプログラムである．

```
1  def f(li) {
2    c = 0
3    s = 0
4    while (li != []) {
5      x = head(li)
6      if x == -999 {
7        break  // ループを抜ける
8      }
9      else if x >= 0 {
10       c = c + 1
11       s = s + x
12       li = tail(li)
13     }
14     else {
15       li = tail(li)
16     }
17   }
18   return (s / c)
19 }
```

ただし，除算の結果は小数点以下を切り捨てた整数値である．

(1) 関数 `f` が正常終了する場合にどのような値を返すか，簡潔に説明せよ．

(2) `f([15, 42, -23, 145, 0, 90, -999, 86])` の出力を答えよ．

(3) 関数 `f` を呼び出したときにゼロ除算を発生させるような入力の整数リストの例を考える．以下の各条件について，それを満たす入力の例を 1 つずつ挙げよ．

a. `f` に与えたとき，7 行目と 15 行目がともに実行されない

b. `f` に与えたとき，7 行目は実行されず，15 行目は実行される

c. `f` に与えたとき，7 行目は実行され，15 行目は実行されない

d. `f` に与えたとき，7 行目と 15 行目がともに実行される

（次ページへ続く）

(4) 以下の関数 h は，補助関数 g を用いて関数 f と同じ計算を行う．g の定義を，ループを使わずに，再帰を使って記述せよ．ただし，リストとペアの操作については上記の記法を使用すること（それ以外は好みのプログラミング言語風の擬似コードを使用して良い）．

```
def g(li, c, s) {
  ... ここを埋める ...
}
```

```
def h(li) {
  p = g(li, 0, 0)
  return (second(p) / first(p))
}
```

Problem 8

Answer the questions (1) to (4) about programs that manipulate lists and pairs of integers. The notations used in programs are as follows.

`[]`	An empty integer list
`[a, b, c]`	A list containing three elements `a`, `b`, and `c`
`head(li)`	The first element of list `li`
`tail(li)`	The list obtained by removing the first element of list `li`
`(a, b)`	A pair whose first element is `a` and second element is `b`
`first(p)`	The first element of pair `p`
`second(p)`	The second element of pair `p`

The function `f` below is a program written using the above notations.

```
1  def f(li) {
2    c = 0
3    s = 0
4    while (li != []) {
5      x = head(li)
6      if x == -999 {
7        break  // exit loop
8      }
9      else if x >= 0 {
10       c = c + 1
11       s = s + x
12       li = tail(li)
13     }
14     else {
15       li = tail(li)
16     }
17   }
18   return (s / c)
19 }
```

Note that division produces an integer by truncating the fractional part.

(1) Explain briefly what value the function `f` returns if it terminates without errors.

(2) Answer the output of `f([15, 42, -23, 145, 0, 90, -999, 86])`.

(3) Consider examples of input integer lists for the function `f` that cause division by zero. For each of the conditions below, give one example input satisfying that condition.

a. When passed to `f`, neither line 7 nor line 15 is executed

b. When passed to `f`, line 7 is not executed, while line 15 is executed

c. When passed to `f`, line 7 is executed, while line 15 is not executed

d. When passed to `f`, both line 7 and line 15 are executed

(Continued on the next page)

(4) The function `h` below uses an auxiliary function `g` to perform the same computation as function `f`. Write the definition of `g` using recursion but not loops. Note that, when manipulating lists and pairs, you must use the notations introduced above (for other parts, you may use pseudo code in the style of your favorite programming language).

```
def g(li, c, s) {
  ... fill in here ...
}
```

```
def h(li) {
  p = g(li, 0, 0)
  return (second(p) / first(p))
}
```

問 9

クロック周波数が可変であり，1 層のキャッシュメモリを持つ CPU A を備えた計算機を考える．CPU A 上で動作する機械語命令は，種類 I1, I2, I3 に分類され，それぞれの 1 命令の実行にかかる時間は下記のとおりとする．

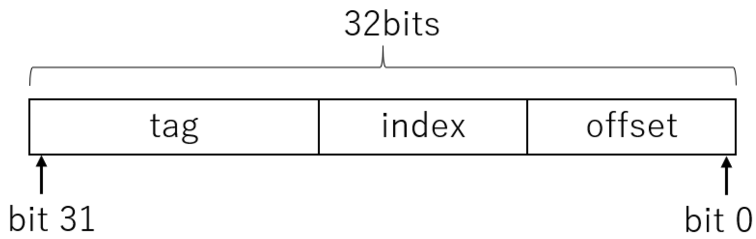
I1: 1 クロックサイクル

I2: 3 クロックサイクル

I3: メモリアクセス命令であり，キャッシュヒットかキャッシュミスのいずれかが起こる．キャッシュヒットした場合は 10 クロックサイクル，キャッシュミスした場合はクロック周波数にかかわらず 100ns ($= 100 \times 10^{-9}$ 秒) かかる．

本問でパイプライン実行による影響および命令キャッシュミスは考慮しなくてよい．計算問題は有効数字 2 桁で答えよ．

(1) CPU A のキャッシュメモリはダイレクトマップ方式を採用し，容量は 32,768 ($= 2^{15}$) バイト，キャッシュブロック (キャッシュラインとも呼ぶ) の大きさは 64 バイトとする．メモリアドレスは 32 ビットで表されるとするとき，アドレスは CPU 内部では以下の図のように解釈される．



tag, index, offset がそれぞれ何ビット必要とするか答えよ．なお，index はそのアドレスを含むメモリの内容がキャッシュメモリ中のどのキャッシュブロックに格納されるかを表す．

(2) CPU A を持った計算機上で，あるプログラム P1 を実行する．CPU A は 2GHz ($= 2 \times 10^9$Hz) で動作するとする．P1 の実行に含まれる命令数は，それぞれの命令種について I1: 6×10^9，I2: 2×10^9，I3: 1×10^9 であった．またキャッシュミス率は 20% であった．プログラム P1 の実行にかかる時間と，1 秒あたりの平均実行命令数を求めよ．

(3) この計算機上でのプログラム P1 の実行時間を，(2) の場合の 5/6 倍以下としたい．そのために以下の 2 つの方法を考える．

HW: プログラムを変更せず，CPU のクロック周波数を変更する．

SW: クロック周波数を変更せず，プログラムを改良することによりキャッシュミス率を減らす．命令種 I1, I2, I3 のそれぞれの実行命令数は変わらないとする．

HW を適用する場合のクロック周波数に求められる条件を答えよ．また SW を適用する場合のキャッシュミス率に求められる条件を答えよ．いずれの場合も，達成不可能な場合は「不可能」と答えよ．

（次ページへ続く）

(4) CPU A 上でのプログラム P1 の実行時間を，(2) の場合の 1/2 倍以下としたい．(3) と同様に HW, SW のいずれかを適用する場合に必要な条件をそれぞれに対して答えよ．

Problem 9

Consider a computer with CPU A, which has variable clock frequency and a single level cache memory. The machine instructions of CPU A are categorized into three groups, I1, I2 and I3. The execution time of a single instruction in each group is as follows.

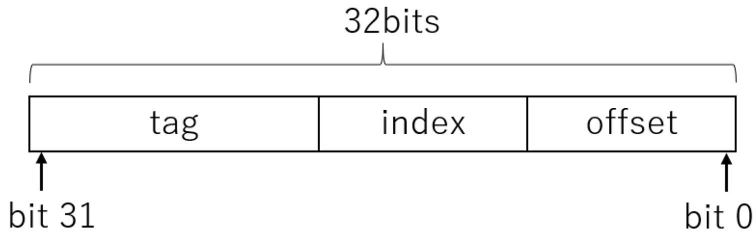
I1: 1 clock cycle

I2: 3 clock cycles

I3: Memory access instructions, each of which causes a cache hit or a cache miss. In case of a cache hit, an instruction spends 10 clock cycles. In case of a cache miss, it spends 100ns ($= 100 \times 10^{-9}$ seconds), at any clock frequency.

We assume we can ignore effects of pipeline execution and instruction cache misses. For calculation problems, answers should have two significant figures.

(1) CPU A has a direct-mapped cache memory with a capacity of 32,768 ($= 2^{15}$) bytes, and the size of a cache block (also called a cache line) is 64 bytes. The CPU uses 32-bit memory address, which is internally split into three parts as shown in the figure.



Answer how many bits are required for tag, index and offset parts, respectively. Note that the index is used to determine the cache block where the memory contents are stored.

(2) A program P1 is executed on a computer with CPU A. The clock frequency is 2GHz ($= 2 \times 10^9$Hz). The numbers of instructions included in the execution of P1 are I1: 6×10^9, I2: 2×10^9, I3: 1×10^9, for each instruction group. The cache miss rate is 20%. Answer the execution time of P1 and the average number of executed instructions per second.

(Continued on the next page)

(3) We want to make the execution time of P1 on this computer to be 5/6 times of that in (2) or shorter. For this purpose, we consider the two following methods.

HW: The clock frequency is changed, while the program is not changed.

SW: The program is improved so that the cache miss rate is reduced. We assume the numbers of executed instructions in I1, I2 and I3, respectively, are the same as before. The clock frequency is not changed.

Answer the condition on the clock frequency when the method HW is applied. Also answer the condition on the cache miss rate when the method SW is applied. For each method, if it is impossible to achieve the improvement, answer “impossible”.

(4) We want to make the execution time of P1 on this computer to be 1/2 times of that in (2) or shorter. Like in (3), when each method of HW or SW is applied, answer the condition for each method.