筆答専門試験科目（午前）　　　３１ 大修

数 学 系　　　時間　９：００～１１：３０

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題 5 題すべてに解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 3 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野，幾何分野，解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について:

$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] 複素数を成分とする 4 次正方行列 A に対して，A^3 が

$$\begin{pmatrix} 0 & a & d & f \\ 0 & 0 & b & e \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形であるとする.

(1) A はベキ零行列であることを示せ.

(2) $A^4 = O$ であることを示せ.

(3) $ab = 0$ であることを示せ.

[2] 複素数を成分とする $m \times n$ 行列全体を $M(m,n)$ で表し，行列の通常の和とスカラー倍により複素ベクトル空間とみなす．また，$A \in M(m,m)$, $B \in M(n,n)$ に対して，線形写像 $f_{A,B} : M(m,n) \to M(m,n)$ を $f_{A,B}(X) = AX - XB$ により定める.

(1) $m = 3$, $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$f_{A,B}$ の固有値をすべて求め，各固有空間の次元を求めよ.

(2) $\dim \mathrm{Ker}(f_{A,B}) \neq 0$ であるためには A と B が共通の固有値を少なくとも一つ持つことが必要かつ十分であることを示せ.

[3] $\mathbb{R}^2$ の通常の位相を $\mathcal{O}$ とする．$\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{O}'$ を

$$\mathcal{O}' = \{U \in \mathcal{O} \mid (0,0) \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

で定める．この $\mathcal{O}'$ は開集合系の公理を満たし, $\mathbb{R}^2$ の位相を定める.

(1) 位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}')$ はハウスドルフ空間ではないことを示せ.

(2) A を $\mathbb{R}^2$ の部分集合で $(0,0) \notin A$ を満たすものとするとき, 位相 $\mathcal{O}'$ に関する A の内部を求めよ.

(3) A を $\mathbb{R}^2$ の部分集合で $(0,0) \in A$ を満たすものとするとき, 位相 $\mathcal{O}'$ に関する A の閉包を求めよ.

(4) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $X = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$ は $\mathcal{O}'$ に関して連結か？理由をつけて答えよ.

(5) 位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}')$ からそれ自身への同相写像は $(0,0)$ を $(0,0)$ に写すことを示せ.

[4] 以下の問に答えよ．

(1) $x = x(u,v)$ と $y = y(u,v)$ は C^1 級の関数で，写像 $(u,v) \mapsto (x(u,v),\, y(u,v))$ は uv 平面の領域 $\widetilde{D}$ から xy 平面の領域 D への全単射とする．またその逆写像も C^1 級とする．このとき，この写像のヤコビ行列式は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

を満たすことを証明せよ．

(2) $E = \{(x,y) \,|\, x > 0,\, y > 0,\, 1 \leq xy \leq 2,\, -2 \leq y - x^2 \leq 2\}$ とするとき，

$$\iint_E \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{y} \right) dx\, dy$$

を求めよ．

[5] 閉区間 $I = [0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を以下のように定義する．

$$f_1(x) = x, \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{f_n(x) + 2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(1) 各 $x \in I$ に対し $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であり，$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ を満たすことを示せ．

(2) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上で一様収束することを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\, dx$ を求めよ．

筆答専門試験科目（午後）　　　　　　３１ 大修

数 学 系　　　　　時間　１３：００～１５：００

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち 2 題を選択して解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 4 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の下に書くこと.（午前と同じ分野を書くこと.）

記号について:

$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] 素体 F 上の多項式 X^4+1 の既約因子の個数を求めよ．ただし個数は重複度をこめて数えるものとする．

[2] $a \in \mathbb{Q}$ とし $f = X^3 + X^2 - (a+1)X + a - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ とおく．また，

$$A = \mathbb{Q}[X, Y]/(f, Y^2 - 2)$$

とおく．即ち A は二変数多項式環 $\mathbb{Q}[X, Y]$ の，f と Y^2-2 とで生成されるイデアル (f, Y^2-2) による剰余環である．A の $\mathbb{Q}$-代数としての自己同型群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(A)$ を求めよ．

[3] $R > r > 0$ を満たす定数 r, R に対して，$\mathbb{R}^3$ 上の関数

$$f(x, y, z) = \bigl(x^2 + y^2 + z^2 - (R^2 + r^2)\bigr)^2 - 4R^2(r^2 - z^2)$$

を考える．ただし (x, y, z) は $\mathbb{R}^3$ の標準座標である．

(1) $S = f^{-1}(\{0\})$ は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分多様体であることを示せ．

(2) S は $\mathbb{R}^3$ の z 軸に関する回転で不変であることを示せ．

(3) $f(x, 0, z) = \varphi_1(x, z)\varphi_2(x, z)$ となる x, z の 2 次多項式 φ_1, φ_2 を求めることにより，S と xz 平面の共通部分 $\{(x, 0, z) \mid f(x, 0, z) = 0\}$ を xz 平面上に図示せよ．

(4) $\mathbb{R}^3$ 上の微分形式

$$\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dy,$$
$$\varphi_0 = -\frac{20}{3}(x^3\, dy \wedge dz + y^3\, dz \wedge dx + z^3\, dx \wedge dy)$$

を S 上に制限して得られる微分形式をそれぞれ ω, φ と書くとき，積分

$$\int_S (\omega + \varphi)$$

を求めよ．

[4] $\mathbb{R}^4$ の部分集合 A, B, C を

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\},$$
$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_3 = x_4 = 0\},$$
$$C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_3^2 + x_4^2 \leq 1,\ x_1 = x_2 = 0\}$$

によって定義し, $X = A \cup B \cup C$ とおく. $\mathbb{R}^4$ の通常の位相に関する相対位相によって X を位相空間と考えるとき, X の整係数ホモロジー群を求めよ.

[5] $0 < \theta_0 < 2\pi$ に対して,

$$\Lambda(\theta_0) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid 0 < \arg z < \theta_0\}$$

とおく．f を $\overline{\Lambda(\theta_0)} \setminus \{0\}$ で連続な複素数値関数で以下の 1, 2, 3 を満たすものとする．ただし $\overline{\Lambda(\theta_0)}$ は $\Lambda(\theta_0)$ の $\mathbb{C}$ での閉包である．

1. f は $\Lambda(\theta_0)$ で正則である．
2. 正の実数 x に対して $f(x)$ は実数であり，$z = re^{i\theta_0}$ $(r > 0)$ のとき $f(z)$ は純虚数である．
3. ある $R > 0$ に対し，f は $\Lambda(\theta_0) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ で有界である．

(1) $\theta_0 = \pi/2$ であるとき,

(1-1) ある整関数 F が存在して,

$$F|_{\Lambda(\theta_0)} = f$$

となることを示せ.

(1-2) $\displaystyle\lim_{\Lambda(\theta_0) \ni z \to 0} f(z) = 0$ を示せ.

(2) 一般の θ_0 に対して,

$$\lim_{\Lambda(\theta_0) \ni z \to 0} f(z) = 0$$

を示せ.

[6] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を $\mu(X) < \infty$ であるような測度空間とし, X 上の実数値関数で $\mathcal{B}$ 可測なもの全体の集合を $\mathrm{m}\mathcal{B}$ とする．$\mathrm{m}\mathcal{B}$ の部分集合 $\mathcal{C}$ が一様可積分であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $K > 0$ が存在して,

$$\sup_{f \in \mathcal{C}} \left\{ \int_{\{x \in X \,|\, |f(x)| > K\}} |f(x)| \, d\mu(x) \right\} < \varepsilon$$

が成立することをいう.

(1) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{m}\mathcal{B}$ が一様可積分であるとき以下を示せ.

(a) $\displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \int_X |f_n(x)| \, d\mu(x) \right\} < \infty.$

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$\mathcal{B}$ の元 A が $\mu(A) < \delta$ を満たすならば $\displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \int_A |f_n(x)| \, d\mu(x) \right\} < \varepsilon$ である.

(2) ある $p > 1$ に対して $\displaystyle\sup_{f \in \mathcal{C}} \left\{ \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right\} < \infty$ となるような $\mathcal{C} \subset \mathrm{m}\mathcal{B}$ は一様可積分であることを示せ.

[7] $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実ヒルベルト空間 H の完全正規直交系とする.

(1) 点列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のときに弱位相に関して収束することを示せ.

(2) $\alpha > 1/2$ に対し, 点列 $\left\{n^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} e_j\right\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のときに強位相 (H の内積から定まる位相) に関して収束することを示せ.

(3) 点列 $\left\{n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} e_j\right\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のときに弱位相に関して収束することを示せ.

[8] f を $\mathbb{R}$ 上で定義された正の値をとる C^1 級の関数とする．初期値問題

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(u(t)), \quad u(0) = 0$$

の解 $u(t)$ ($t > 0$) に対して以下の問に答えよ.

(1) f が

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{f(u)} du = \infty$$

を満たすとき，解はすべての $t > 0$ に対して存在し

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = \infty$$

を満たすことを示せ.

(2) f が

$$T = \int_0^{\infty} \frac{1}{f(u)} du < \infty$$

を満たすとき，

$$\lim_{t \to T-0} u(t) = \infty$$

が成り立つことを示せ.

(3) f が

$$\limsup_{u \to \infty} \frac{f(u)}{u} < \infty$$

を満たすとき，ある正定数 a に対して

$$\lim_{t \to \infty} e^{-at} u(t) = 0$$

が成り立つことを示せ.