東京工業大学理学院数学系修士課程入学試験　午前の部 問題
令和 2 年 8 月実施、解答時間は 90 分（オンライン試験に切り替えたため、解答時間が変更になった）。

（解答に当たっての注意事項等は省略）

記号について

$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

**[1]** $V$ を $x$ の関数 $e^x$, $xe^x$, $e^{2x}$ で生成される $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．すなわち，

$$V = \{ae^x + bxe^x + ce^{2x} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

また，$V$ から $V$ への線形写像全体を写像の和とスカラー倍により $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなしたものを $L(V)$ とする．このとき，各正整数 $n$ に対して，$L(V)$ の元を

$$D_n(f)(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad (f = f(x) \in V)$$

により定め，$D_0$ で恒等写像を表す．

(1) $\{D_0, D_1, D_2\}$ は一次独立であることを示せ．

(2) $\{D_n \mid n \geq 0\}$ で生成される $L(V)$ の部分空間の次元を求めよ．

(3) 各正整数 $n$ に対して，$V$ における方程式

$$(D_0 f)(x) + (D_n f)(x) = e^x + xe^x + e^{2x}$$

の解を求めよ．

**[2]**

(1) 集合 $\Lambda$ によって添え字づけられた $\mathbb{R}$ の閉集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で次の性質 $(*)$ を満たすものを 1 つ挙げよ．

　　$(*)$ $\Lambda$ の空でない任意の有限部分集合 $F$ に対して $\bigcap_{\lambda\in F} A_\lambda \neq \emptyset$ が成り立つ．さらに $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset$ が成り立つ．ここで $\emptyset$ は空集合を表す．

ただし $\mathbb{R}$ の位相としてはユークリッド距離から定まる距離位相を考える．

(2) $X$ を位相空間とする．$X$ がコンパクトである（すなわち $X$ の任意の開被覆が有限部分被覆を持つ）ことは, $X$ の閉集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で (1) の性質 $(*)$ を満たすものが存在しないことと同値であることを示せ．

(3) (2) の結果を用いてコンパクト位相空間の閉集合はコンパクトであることを示せ．

**[3]** $a, b$ は $0$ 以上の整数で $2 \leq a + b \leq 4$ をみたすものとし，$\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数 $f$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^a y^b}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定める．以下の各問に対してその証明も含めて答えよ．

(1) $f$ が $(0,0)$ で連続にならないような $a, b$ の組を $1$ つ求めよ．

(2) $f$ が $(0,0)$ で全微分可能となる $a, b$ の組を $1$ つ求めよ．

(3) $f$ が $(0,0)$ で連続であるが全微分可能にならないような $a, b$ の組を $1$ つ求めよ．

東京工業大学理学院数学系修士課程入学試験　午後の部　問題用紙

令和 2 年 8 月実施、解答時間は 90 分（オンライン試験に切り替えたため、解答時間が変更になった)。

（注意事項等は省略）

記号について

$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す.

$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.

$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.

$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.

$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

**[1]** $A$ を乗法の単位元 1 をもつ可換環とする．$e \in A$ がべき等元であるとは, $e^2 = e$ が成り立つことである．$A$ の部分集合 $S \subset A$ について, $S$ に属するべき等元全体を $I(S)$ で表すことにする．また, べき等元 $e$ に対して, $e^* = 1 - e$ とする（$e^*$ もべき等元である).

(1) $e \in I(A)$ について, 同型 $A/(e) \cong A_{e^*}$ を示せ．(ここで $f \in A$ に対して, 積閉集合 $\{f^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ で $A$ を局所化したものを $A_f$ と表す.)

(2) $A$ のべき等元からなる集合 $E$ が極大であるとは, 次の 2 条件が成り立つこととする.

(a) 任意の $e \in I(A)$ について，$e \in E$ または $e^* \in E$ である.

(b) $E$ で生成される $A$ のイデアルは $A$ 全体に一致しない.

任意の素イデアル $\mathfrak{p} \subset A$ に対して，$I(\mathfrak{p})$ は極大であることを示せ.

(3) $A$ のべき等元からなる集合 $E$ が極大ならば, $A$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ で $E = I(\mathfrak{m})$ となるものが存在することを示せ.

**[2]** $p$ を素数とする．$k$ は標数 $p > 0$ の体とし, $n$ は正整数とする．$k$ 上の $n$ 変数有理関数体 $L = k(t_1, \ldots, t_n)$ を考える．$V$ により, $t_1, \ldots, t_n$ の生成する $L$ の $n$ 次元部分 $\mathbb{F}_p$-ベクトル空間を表す．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ を $L$ に次の様に作用させる: $g = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ と $f = f(t_1, \ldots, t_n) \in L$ に対し

$$(g.f)(t_1, \ldots, t_n) \;=\; f(g(t_1), \ldots, g(t_n)), \qquad g(t_j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} g_{ij} t_i.$$

さらに

$$F(X) \;=\; \prod_{v \in V} (X - v) \quad \in L[X]$$

とおく.

(1) $F(X)$ は

$$F(X) \;=\; X^{p^n} + s_1 X^{p^{n-1}} + \cdots + s_{n-1} X^p + s_n X, \qquad s_i \in L^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)},$$

の形である事を証明せよ．ここに $L^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)}$ は $L$ の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ による固定部分体を表す.

(2) $L$ の部分体 $K = k(s_1, \ldots, s_n)$ を考える．$L/K$ は有限次ガロア拡大であり, そのガロア群は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ と同型である事を証明せよ.

**[3]** $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $f$ を

$$f(x, y, z) = (x, xy, xz)$$

で定める．$f$ の定義域を単位球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に制限して得られる写像を $g : S^2 \to \mathbb{R}^3$ とする.

(1) $S^2$ の各点 $p$ に対して微分 $(dg)_p : T_p S^2 \to T_{g(p)} \mathbb{R}^3$ の階数を求めよ．ここで一般に可微分多様体 $M$ に対して $T_p M$ は点 $p \in M$ における接ベクトル空間を表す.

(2) 像 $g(S^2)$ は $\mathbb{R}^3$ の部分多様体の構造を持ちえないことを示せ.

**[4]** $\mathbb{R}^4$ の部分集合 $A, B$ を

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\},$$
$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_1 = x_3,\ x_2 = x_4\},$$

によって定義し, $X = A \cup B$ とおく. $\mathbb{R}^4$ 上の通常の位相に関する相対位相によって $X$ を位相空間と考えるとき, $X$ の整数係数ホモロジー群を求めよ.

**[5]** $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とする．$f(z)$ を $D$ の閉包を含む領域で定義された有理型関数で，$D$ の境界上には極をもたないものとする．このとき，次の (i),(ii) が同値であることを示せ．

(i) 任意の多項式関数 $P(z)$ に対し，

$$P(0) = \int_C P(z) f(z)\, dz$$

が成り立つ．ただし，$C$ は $D$ の境界を反時計回りに一周する積分路である．

(ii) $f(z)$ の $D$ 内の極は原点のみであり，そこでの位数は 1，留数は $1/(2\pi i)$ である．

**[6]** 2 つの異なる実数 $a_1, a_2$ に対し，

$$f(t) = (t - a_1)^2 (t - a_2)^2$$

とおく．$\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(u_n(x))\, dm(x) = 0 \qquad (*)$$

をみたすものとする．ただし，$m$ はルベーグ測度である．

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ と $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$A_{\varepsilon,n} = \{x \in \mathbb{R} \mid \min_{j=1,2} |u_n(x) - a_j| \geq \varepsilon\}$$

とするとき，$\lim_{n\to\infty} m(A_{\varepsilon,n}) = 0$ となることを示せ．

(2) ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，ある $j = 1, 2$ が存在して

$$\liminf_{n \to \infty} |u_n(x) - a_j| = 0$$

となることを示せ．

(3) 次の主張が正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ：

$(*)$ をみたす $\mathbb{R}$ 上の任意のルベーグ可測関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，ある部分列 $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ に対し $\{u_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ は収束列になる．

**[7]** $X$ を閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値連続関数全体のなす複素バナッハ空間とする．ただし，$X$ のノルムは

$$\|u\|_X = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)| \quad (u \in X)$$

である．また，$u \in X$ に対して

$$(Au)(x) = \int_0^x u(y)\,dy \quad (x \in [0,1])$$

によって，作用素 $A$ を定める．

(1) $A$ が $X$ から $X$ への有界線形作用素であることを示せ．

(2) $A$ の作用素ノルムを $\|A\|$ とするとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|A^n\| \leq \frac{1}{n!}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し，作用素 $zI - A$ が有界な逆作用素をもつことを示せ．ただし，$I$ は $X$ 上の恒等作用素である．