選択専門科目
機 械 系

2022 大修

時間 ９：３０～１２：３０

注 意 事 項

１．問題１から問題５より４問を選択して解答しなさい。

２．解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。

３．解答は，必ず問題ごとに別々の答案用紙に記入しなさい。
各問題の解答は裏面も使用できますが，１枚に収めること。

４．各答案用紙には，必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。
問題番号は試験科目名欄に書きなさい。
氏名を書いてはいけません。

問題１（材料力学）

下記の空欄①～⑳のそれぞれに当てはまる適切な数式または語句などを答えよ。

問１　ある金属材料を用いて以下の様な試験を実施した。

(1)　この材料で作製した試験片に対して引張試験を実施した結果，図１に示す応力-ひずみ線図を得た。この応力-ひずみ線図において原点 O からイの応力までの領域では $\boxed{\ ①\ }$ の法則が成立する。また，ウで示す最大の応力を $\boxed{\ ②\ }$ と呼ぶ。

(2)　この材料で作製した真直なはりに対して図２のように曲げモーメント M を負荷したとき，図２中の３点 a，b，c に発生する軸方向応力をそれぞれ σ_a，σ_b，σ_c とすると，引張応力となるのは $\boxed{\ ③\ }$ である。$\boxed{\ ③\ }$ が図１のア，イ，ウのうち，$\boxed{\ ④\ }$ の応力を超えたとき，はりの表面の点 a と c では $\boxed{\ ⑤\ }$ 変形が生じ，その後に曲げモーメント M を除荷すると，はりには $\boxed{\ ⑥\ }$ 応力が発生する。

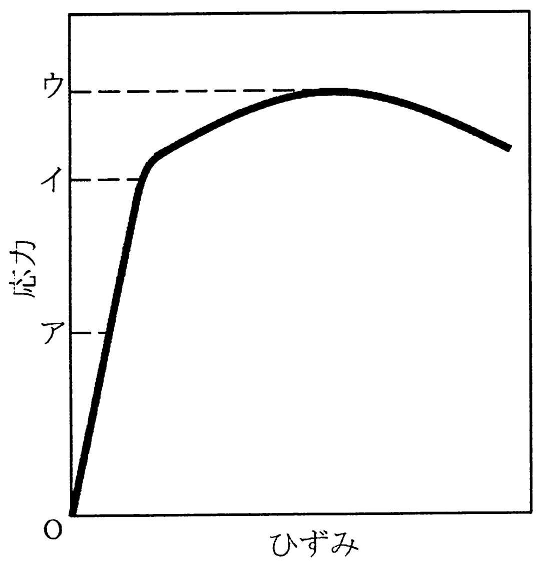


図１

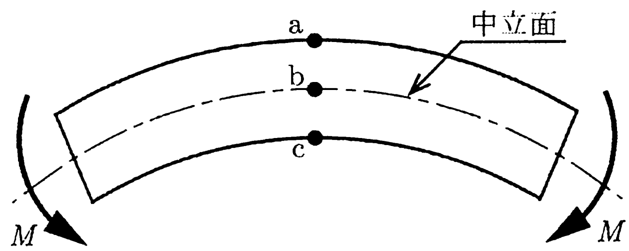


図２

（次ページに続く）

問2　図３に縦断面図を示すとおり，長さL の円筒（縦弾性係数E，線膨張係数α，横断面積$2A$）の内側に長さ$L-d$ の丸棒（縦弾性係数E，線膨張係数2α，横断面積A）を中心軸が一致するように配置して，両者の下端を剛体床に固定し，円筒の上端を剛体板に接合した。円筒と丸棒の初期温度をt_0 とする。円筒と丸棒に発生する軸方向の引張力をP_1 とP_2，伸びをλ_1 とλ_2 とする。なお，$d << L$ とし，丸棒に発生するひずみはλ_2/L として近似せよ。また，円筒と丸棒の径方向の応力と変形，および自重の影響は無視せよ。

(1) 丸棒の温度だけをt_0 からΔt_1 以上上昇させると，丸棒の上端が剛体板に接触することが分かった。このとき，Δt_1をα，d，L で表すと$\Delta t_1 =$ $\boxed{⑦}$となる。

(2) 円筒と丸棒の両方の温度をt_0 からΔt_2 以上上昇させると，丸棒の上端が剛体板に接触することが分かった。このとき，λ_1，λ_2，d の間には$\lambda_2 =$ $\boxed{⑧}$の関係がある。また，Δt_2 をα，d，L で表すと$\Delta t_2 =$ $\boxed{⑨}$となる。

(3) 円筒と丸棒の両方の温度をt_0 からΔt_3 （$\Delta t_3 > \Delta t_2$）だけ上昇させたとき，P_1 とP_2 の間には$P_1 =$ $\boxed{⑩}$の関係がある。また，P_1 をA，E，α，d，L，Δt_3で表すと，$P_1 =$ $\boxed{⑪}$となる。

(4) (3)の円筒と丸棒の温度をΔt_3 だけ上昇させた状態において，剛体板に円筒と丸棒の軸方向に引張荷重P を作用させたとき，丸棒は剛体板に接触したままであった。このとき，P_1 をA，E，α，d，L，Δt_3，P で表すと$P_1 =$ $\boxed{⑪}$ + $\boxed{⑫}$となる。

(5) (4)の状態から剛体板に作用させている引張荷重P を徐々に大きくしていくと，$P = P_c$ のときにP_2 が 0 になった。このときの荷重P_c をA，E，α，d，L，Δt_3 で表すと$P_c =$ $\boxed{⑬}$となる。

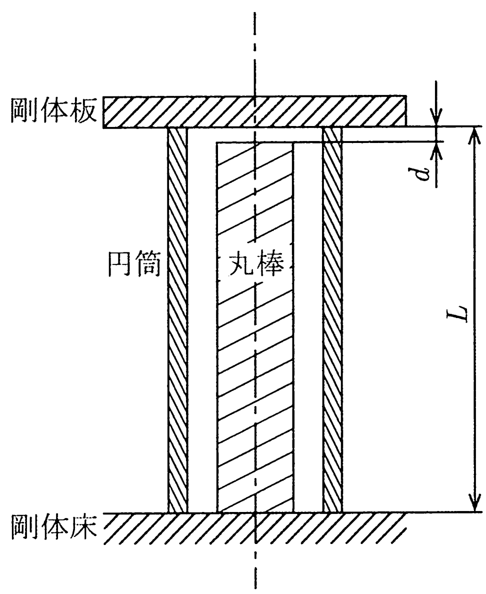


図３

（次ページに続く）

問3　図4に示すように，直角に折れ曲がったはり ABCD の点 D に集中荷重P が下向きに加わっている場合を考える。点 A は固定され、点 B は単純支持されている。AB の長さをL, BC と CD の長さを$L/3$ とし，はりの曲げ剛性をEI とする。なお，自重の影響は無視せよ。

(1) 点 B に生じる上向きの反力をR とする。点 A ではりに作用する下向きの反力R_0 をP とR で表すと$R_0 =$ ⑭ となる。

(2) 点 A ではりに作用する時計回りの支持モーメントをM_0 とすると，はりの AB 部分に生じる曲げモーメント$M(x)$ は，M_0 とP とR を使ってx の関数として$M(x) =$ ⑮ と表される。

(3) はりの AB 部分のたわみの微分方程式と，点 A と点 B での境界条件から，M_0 はP とR とL を使って$M_0 =$ ⑯ と表される。

(4) はり ABCD 全体のモーメントのつり合いから，R をP で表すと$R =$ ⑰ と表される。

(5) はりの AB 部分に生じる曲げ応力は，$x =$ ⑱ の位置で最大となる。

(6) はりの AB 部分のたわみの絶対値は，$x =$ ⑲ の位置で最大となり，その大きさをP とL とEI で表すと ⑳ となる。

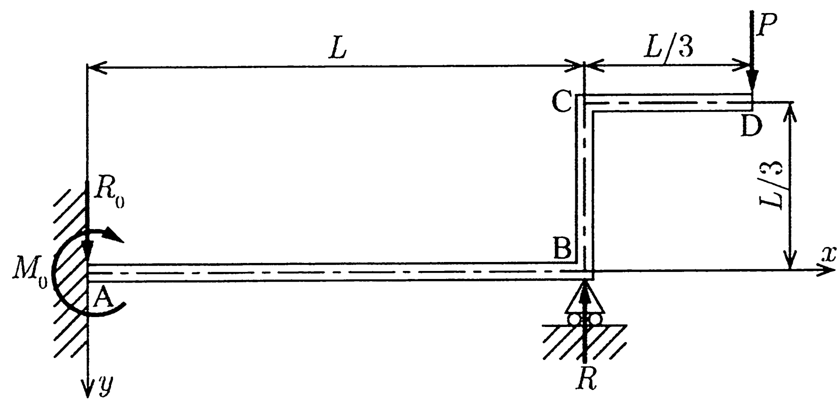


図4

（問題1　終わり）

問題２（機械力学）

問１　以下の設問に答えよ。

(1) 図１の質量mの質点，粘性減衰係数cのダンパ，剛性係数 k のばねからなる１自由度振動系は不足減衰状態にあり鉛直面内に置かれている。xは鉛直上向きを正とした質点の変位であり，gは重力加速度ベクトルを表している。以下の(a)～(f)の各文において，２つの下線部が両方正しい場合には「正しい」と答え，下線部に１つでも誤りがあれば「誤り」と答えて誤っている部分を訂正せよ。

(a) 変位xの原点を$\underline{\text{ばねの自然長}}$の位置にとれば，系の自由振動の運動方程式 $m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$ を得る。右辺各項の負号は，ばねとダンパの反力ベクトルが質点の加速度ベクトルと$\underline{\text{逆の向き}}$であることを意味している。

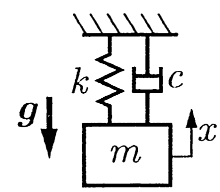


図１

(b) 系の固有角振動数 ω_n および減衰比 ζ はそれぞれ $\underline{\sqrt{\frac{k}{m}}}$ および $\frac{c}{2\sqrt{mk}}$ で表され，$\underline{0 < \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}}$ である。

(c) 系の$\underline{\text{特性方程式}}$の根は i を虚数単位として $-\zeta\omega_n \mp i\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ と計算でき，根の$\underline{\text{実部の絶対値}}$は減衰固有角振動数 ω_d を表している。

(d) 変位xの原点で静止している質点に初速度 $\dot{x}(0) = v_0$ のみを与える理論的な方法として，質点に $\underline{v_0\delta(t)}$ の力積を作用させる方法がある。ただし，t は時間，$\delta(t)$ はディラックのデルタ関数である。このとき変位の応答は，系の減衰固有角振動数 ω_d を用いて $x(t) = A(t)\sin\omega_d t$ の形に書け，式の中の関数 $A(t)$ は $\underline{(v_0/\omega_n)\,e^{-\zeta\omega_n t}}$ で表される。

(e) ω を励振角振動数，F を力の振幅として定義される複素励振力$f(t) = Fe^{i\omega t}$が質点に作用すると仮定したとき，運動方程式は $\underline{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{i\omega t}}$ で表される。このとき変位$x(t)$の$\underline{\text{一般解}}$は ω の関数である複素振幅$X(i\omega)$を用いて $x(t) = X(i\omega)e^{i\omega t}$ の形に書ける。

(f) 複素振幅 $X(i\omega)$ の大きさと力の振幅 F の比は周波数応答関数の$\underline{\text{ゲイン}}$と呼ばれる量で，$20\log_{10}\frac{|X(i\omega)|}{F}$ で計算した値に$\underline{\text{ホン}}$という単位を付して示される。

(2) 以下の(g)～(j)の各々の記述の下線部が正しい場合には「正しい」と答え，誤っている場合には「誤り」と答えて訂正せよ。

(g) 減衰の小さい連続体を固有振動数で加振した場合，振動振幅が局所的に小さくなる場所を$\underline{\text{反共振点}}$と呼ぶ。

(h) 両端を支持され張力を受ける弦の振動モード形は$\underline{\text{複数}}$存在する。

(i) ダンパがクーロン摩擦でモデル化できる１自由度減衰振動系の自由振動の変位の包絡線は時間の$\underline{\text{指数関数}}$となる。

(j) 系の周波数応答関数を実験的に得る一つの方法として，アクチュエータによる$\underline{\text{スイープ加振}}$がある。

（次ページに続く）

問２　図２に示す，３つの質点と２つのばねで構成される３自由度振動系を考える。３つの質点の質量はそれぞれmであり，隣り合う質点をつなぐ２つのばねの剛性係数はそれぞれkである。ばねの長さが自然長のときの各質点の位置を座標x_1, x_2, x_3の原点とする。ばねの質量は無視でき，床と質点との間に摩擦はないとする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\Omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ とおけば，この振動系の運動方程式は下記の形に表記できる。

$$\boldsymbol{I}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{bmatrix}+\Omega^2\boldsymbol{K}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{I}$は３行３列の単位行列であり，$\boldsymbol{K}$は３行３列の行列である。$\boldsymbol{K}$を求めよ。

(2)　この振動系の固有角振動数を ω_0, ω_1, ω_2 とおき，以下の手順で求めていく。

(i)　応答 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}e^{i\omega t}$ を仮定して運動方程式に代入すると，$\boldsymbol{AX}e^{i\omega t}=[0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$を得る。ここで $\boldsymbol{x}=[x_1\quad x_2\quad x_3]^{\mathrm{T}}$ は変位ベクトル，$\boldsymbol{X}$は定数ベクトル，iは虚数単位，tは時間とする。$\boldsymbol{A}$は３行３列の行列である。$\boldsymbol{A}$ を ω, Ω, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{K}$ を用いて表せ。

(ii)　$\boldsymbol{AX}=[0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$ が $\boldsymbol{X}\neq[0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$ となる解を持つために ω が満たすべき方程式を解いて，ωを求める。その１つの解は $\omega_0=0$ である。他の２つの解，ω_1, ω_2 を，Ω を用いて表せ。ただし $0<\omega_1<\omega_2$ とする。

(3)　$\omega_0=0$ は，この振動系のどのような運動に対応するものか。30字程度で説明せよ。

(4)　固有角振動数 ω_1 に対応する振動モード形$[X_1\quad X_2\quad X_3]^{\mathrm{T}}$を求め図３のように図示した。ただし $X_1=1$ となるよう定めた。同様に，固有角振動数 ω_2 に対応する振動モード形を以下の手順で求め図示することを考える。

(i)　固有角振動数 ω_2 に対応する振動モード形$[X_1\quad X_2\quad X_3]^{\mathrm{T}}$を求めよ。ただし $X_1=1$ とせよ。

(ii)　図３と同様の縦軸と横軸を描き，固有角振動数ω_2に対応する振動モード形を図示せよ。ただし $X_1=1$ とし，対応するX_2とX_3の値を図の中に記入せよ。

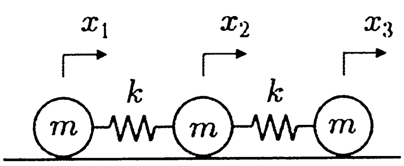


図２

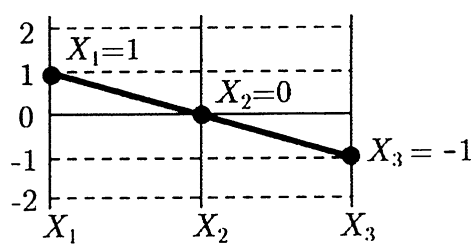


図３

（問題２　終わり）

問題３（熱力学）

問１　以下の記述において，①～②は最も適切な語句を，また③～⑬はあてはまる数値を答えよ。ただし，⑦～⑧と⑫～⑬では，変化量が負の値の場合には数字の前にマイナス記号を付けること。

(1) ピストン－シリンダ系に封入された理想気体がポリトロープ変化する際に，ポリトロープ指数が 0 のときは（　①　）変化，∞のときは（　②　）変化をそれぞれ表す。

(2) ピストン－シリンダ系に封入された比熱比 1.5 の理想気体が，外部から熱を与えられて圧力一定の条件で準静的に膨張した。このとき，与えられた熱の（　③　）%が外部仕事に変換される。

(3) 気体分子運動論によれば，２原子分子理想気体の分子の自由度は（　④　）であり，比熱比は（　⑤　）となる。ただし，分子内部の振動運動の寄与は考えない。

(4) 分子量 40 の理想気体 8 kg を容積一定のもとで 100 ℃から 200 ℃に加熱するために 660 kJ の熱量を必要とした。この気体の気体定数は（　⑥　）J/(kg·K)である。さらに，同じ理想気体を容積一定のもとで 100 ℃から 300 ℃に加熱する時の内部エネルギーの変化量は（　⑦　）kJ，エンタルピーの変化量は（　⑧　）kJ，比熱比は（　⑨　）である。ただし，一般気体定数を 8.0 J/(mol·K)として計算せよ。

(5) 800 ℃一定の熱源と 200 ℃一定の熱源との間で熱機関を運転する場合の理論最大熱効率は（　⑩　）%である。

(6) 外気温が 42 ℃のとき，室内を 27 ℃に保つために可逆冷凍機を運転しており，その消費電力が 10 kW であったとき，室内から取り除かれている熱は（　⑪　）kW である。

(7) 200 ℃一定の熱源（系 A）と 100 ℃一定の熱源（系 B）が接しており，両者間で毎秒 1000 J の熱移動がある。系 A と系 B を合わせたものを全体系とし，環境温度を 27 ℃とする。このとき，系 A および全体系の毎秒のエントロピー変化はそれぞれ（　⑫　）J/K および（　⑬　）J/K である。

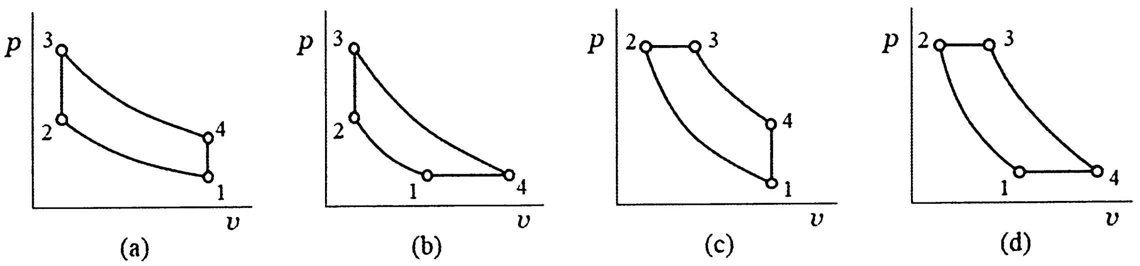
（次ページに続く）

問2　以下の記述において，①～⑧にあてはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢から選べ。ただし，同じ選択肢を複数回用いてはならない。

ディーゼルエンジンでは，シリンダ内で（　①　）され高温高圧となった空気に対し，燃料を霧状に噴射する。空気と燃料は速やかに混合し，（　②　）条件を満たした部分から（　③　）が進行する。これをモデル化したものがディーゼルサイクルで，その $p-v$ 線図（p は圧力，v は比体積）は（　④　）となる。図中の 1，2，3，4 が各点における状態を表すとき，過程 1→2 は（　⑤　），過程 2→3 は（　⑥　），過程 3→4 は（　⑦　），過程 4→1 は（　⑧　）となる。

①～③の選択肢：　臨界，予混合，膨張，火花点火，燃焼，等温，断熱，収縮，自着火，加熱，拡散，圧縮

④の選択肢：



⑤～⑧の選択肢：　等圧加熱，等積加熱，等温加熱，等圧冷却，等積冷却，等温冷却，断熱圧縮，断熱膨張，等温膨張，等温圧縮

問3　理想的ランキンサイクルの $T-s$ 線図（T は温度，s は比エントロピー）が図1で表されるとして，以下の問いに答えよ。なお，状態3における過熱蒸気の比エントロピーを s_3 とする。また，状態4における飽和液と飽和蒸気の比エンタルピーをそれぞれ h_{4f}，h_{4g} とし，比エントロピーをそれぞれ s_{4f}，s_{4g} とする。

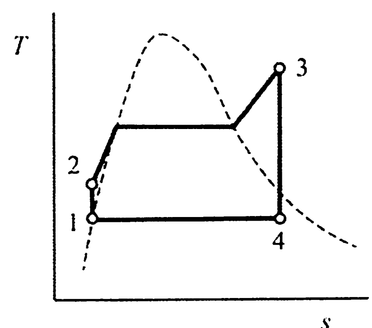


図1

(1) 状態 1～4 における作動流体の比エンタルピーをそれぞれ h_1～h_4 とする。これらを用いて熱効率を表せ。
(2) 状態1における飽和液の比体積を v_1，状態1，2の圧力をそれぞれ p_1，p_2 とする。ポンプ仕事を v_1，p_1，p_2 を用いて表せ。ただし，水の圧縮性は無視してよい。
(3) 状態4の湿り飽和蒸気の乾き度 x を s_3，s_{4f}，s_{4g} を用いて表せ。
(4) 状態4の湿り飽和蒸気の比エンタルピー h_4 を x，h_{4f}，h_{4g} を用いて表せ。

（問題3　終わり）

問題４（流体力学）

問１　図１に示すように，圧力 P_0 の空気中に重力と逆方向へ放出する噴水を考える。このときノズル出口の高さを z_0，断面積を A_0，水の速度を v_0 とする。また，高さ z_1 におけるノズル断面積を A_1，水の静圧を P_1，速度を v_1 とする。水の密度を ρ，重力加速度を g とし，完全流体を仮定して以下の問いに答えよ。

(1)　z_0 と z_1 における速度と圧力の関係をベルヌーイの定理を用いて表せ。

(2)　速度 v_0 を，v_1 以外の与えられた物理量を用いて表せ。

次に，図２に示すように噴水の運動量を利用してバケットを浮上させることを考える。バケットが維持される高さを h とする。ここで，水の流れはバケットにより 180 度変えられるが，水の流れがバケットにより変えられ始めてから離脱するまでの間に重力の影響はなく，流れの断面積も変わらないものとする。

(3)　バケットの質量が M のとき，バケットはノズル出口の高さ$(h=0)$に維持された。このとき，質量 M を高さ z_0 における物理量を用いて表せ。

(4)　高さ z $(z_0 < z < z_0+h)$ における噴流の速度 v を，高さ z_0 における物理量と z を用いて表せ。

(5)　質量 m $(< M)$ のバケットはノズル出口から高さ h_m に維持された。このとき，h_m を高さ z_0 における物理量を用いて表せ。

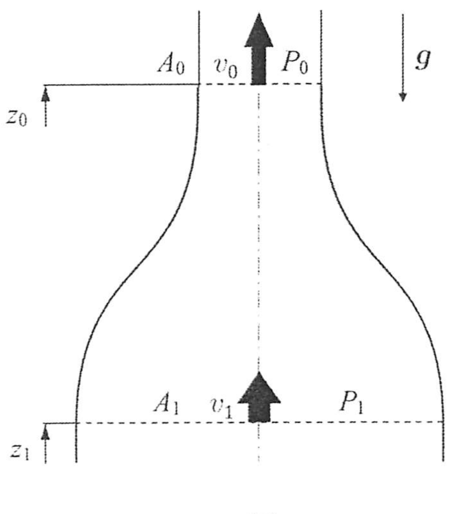


図１

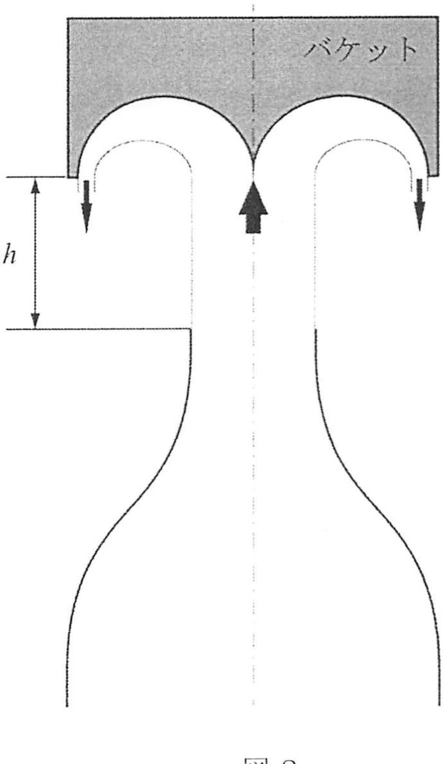


図２

（次ページに続く）

問２　物体に働く流体力に関して記述した以下の文章の（　　　）には該当する語句あるいは数式を，｛　　　｝には適切な数値を，【　　　】には適切な選択肢を答えよ。なお，円周率はπとして解答してもよい。

一般に，一様流中に置かれた物体には，流れ方向に作用する（　①　）力と，流れと垂直方向に作用する揚力が働く。図３は，速度 U の一様流中に置かれた球に働く（　①　）力係数（C_D）とレイノルズ数（Re）の関係を示している。流体の密度をρ，流れ方向への物体の投影面積を A とすると，（　①　）力は F_D =（　②　）と表される。静止した流体の中に直径 d=0.10m，質量 M=135g の球を水平方向に速度 U=27.0m/s で打ち出した場合（ただし，流体の密度と動粘性係数はそれぞれρ=1.20kg/m^3，ν =1.50×10^{-5}m^2/s である），レイノルズ数は｛　③　｝であるので，（　①　）力係数は約 0.4 である。ここで，（　①　）力係数を 0.40 として，運動中に球に作用する（　①　）力が打ち出し直後の値で一定と仮定する。このとき，球の打ち出し方向の速度が 0.80×U まで減速されるまでの時間は｛　④　｝s であり，それまでの打ち出し方向への移動距離は｛　⑤　｝m である。図３より，レイノルズ数が 2.00×10^5 を超えると，（　①　）力係数は急激に低下し，約 0.2 となる。これは【　⑥　〔ア：はく離せん断層，イ：境界層，ウ：再付着点〕】が【　⑦　〔ア：乱流遷移，イ：再層流化，ウ：分岐〕】し，【　⑧　〔ア：よどみ点，イ：はく離点，ウ：再付着点〕】が【　⑨　〔ア：前方に移動する，イ：変化しない，ウ：後方に移動する〕】ためである。ここで，Re≧2.00×10^5 で（　①　）力係数は 0.20 で一定と仮定する。（　①　）力係数が 0.20 となる打ち出し速度の下限値は｛　⑩　｝m/s である。

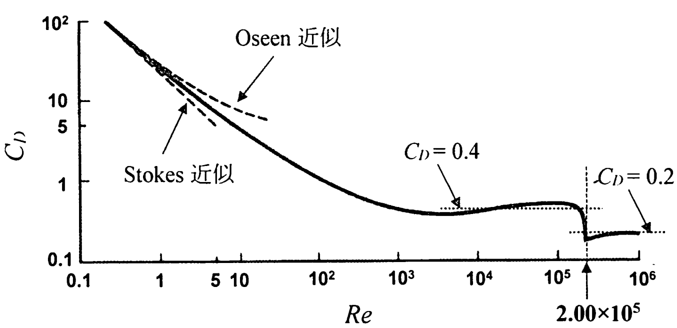


図３　図中の実線は実験より得られた相関式，破線は近似理論による解

（次ページに続く）

次に，速度 U の一様流中に置かれた直径 d の回転球を考える。球には回転角速度ωの回転がかけられている。回転軸は球中心を通り，その向きは一様流の方向に対して垂直とする。図４は，速度 U の一様流中に置かれた回転球の回転率（$\omega d/(2U)$）と（　①　）力係数及び揚力係数（C_L）の関係を示している。流体の密度をρ，流れと垂直な方向への物体の投影面積を A_p とすると，揚力は F_L =（　⑪　）と表される。図４の関係がレイノルズ数に依存しない場合，速度 U=27.0m/s で静止流体中に打ち出された直径 d=0.10m，質量 M=135g の球に最大の揚力を発生させるには，球に｛　⑫　｝rad/s の回転を与えれば良い。この回転球の打ち出し方向の速度が 0.80×U まで減速した時，無回転球を打ち出した場合の軌道を含む平面から回転球は｛　⑬　｝m 垂直方向にずれる。ここで，回転球を打ち出し時の回転軸は重力方向を向いており，運動中に回転軸の向きは変化せず，角運動量も保存されるとする。また，打ち出し直後の（　①　）力と揚力が運動中は維持されるものとする。

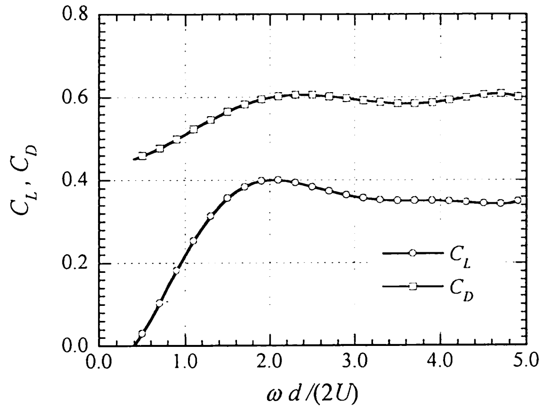


図４

（問題４　終わり）

問題５（工業数学）

問１　以下の各問いに答えよ。

(1) x，y 平面上の領域 $x^2+(y-b)^2 \le a^2$ を直線 $y=x$ 回りに回転してできる立体の体積を求めよ。ただし，$b>2a>0$ とする。

(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$ の一般解を求めよ。$u=x+y$ と置いてもよい。

問２　以下の各問いに答えよ。

(1)　行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。ただし，固有ベクトルは正規化せよ。

(2)　A^n を求めよ。ただし，n は自然数とする。

問３　以下の各問いに答えよ。

(1)　複素数 z の関数 $\dfrac{1}{1+z}$ のマクローリン展開を求めよ。

(2)　複素数 z の関数 $\dfrac{1}{z(e^z-1)}$ の $z=0$ における留数を求めよ。

（次ページに続く）

問 4　以下の式の空欄に入る適切な数値を記せ。

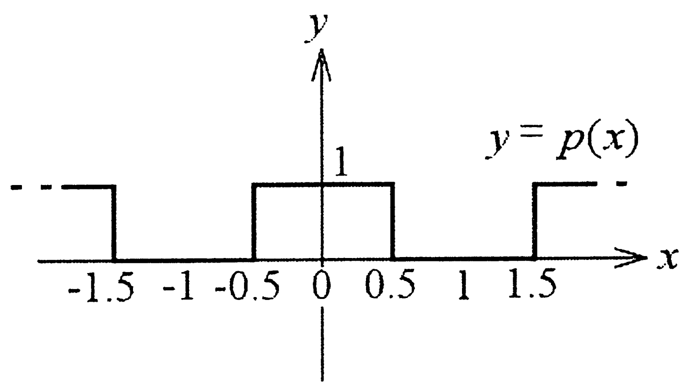
周期関数 $f(x)$ は，その周期を T とすると，不連続点を無視した場合，以下の複素フーリエ級数に展開できる。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi x}{T}}$$

ここで c_n は関数 $f(x)$ の複素フーリエ係数と呼ばれる。また，i は虚数単位である。

(1)　以下に示す周期 $T = 2$ の周期関数 $p(x)$ を考える。

$$p(x) = \begin{cases} 0 & (-1 < x \leq -0.5) \\ 1 & (-0.5 < x \leq 0.5) \\ 0 & (0.5 < x \leq 1) \end{cases}$$



この関数 $p(x)$ の 3 次までの複素フーリエ係数は以下のように表される。

$c_0 =$ ① + ② i

$c_1 =$ ③ + ④ i

$c_2 =$ ⑤ + ⑥ i

$c_3 =$ ⑦ + ⑧ i

(2)　一般に複素フーリエ係数 c_n には $c^*_n = c_{-n}$ の関係があり，* は複素共役を表している。(1) で求めた複素フーリエ係数を用いて関数 $q(x)$ を以下のように定義する。

$$q(x) = \sum_{n=-3}^{3} c_n e^{i\frac{2n\pi x}{T}}$$

このとき，

$$\int_0^2 \{q(x)\}^2 dx = \boxed{⑨}$$

と表される。

（問題 5　終わり）