選択専門科目　　　　　　　　　　　　　　2023 大修
機 械 系

時間 ９：３０～１２：３０

注　意　事　項

１．問題１から問題５より４問を選択して解答しなさい。
２．解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
３．解答は，必ず問題ごとに別々の答案用紙に記入しなさい。
　　各問題の解答は裏面も使用できますが，１枚に収めること。
４．各答案用紙には，必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。
　　問題番号は試験科目名欄に書きなさい。
　　氏名を書いてはいけません。

問題１（材料力学）

問１　以下の文章の①から④に最も適した単語または記号を答えよ。

図１-1 は板状の引張試験片の形状を示している。図１-2 は 3 種類の鉄系材料（純鉄，低炭素鋼，高張力鋼）の引張試験をして得られた応力―ひずみ線図である。図中 a，b，c のうち低炭素鋼のものは ① で，応力の増加とともに明らかな降伏現象がみられる。このとき引張試験片の平行部（長さL_c）の一部に ② 線が生じ，その後，ほぼ一定の応力を保ちながらこの線が引張試験片の平行部に広がる。このときの応力は下降伏点となる。平行部がすべて ③ 変形した後に荷重が再び上昇する。この現象を ④ 硬化という。そして最大応力に達したのち，応力は下がり始め破断に至る。

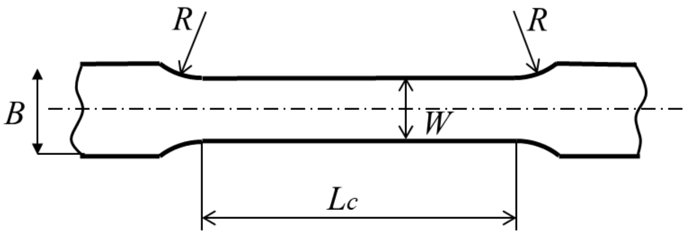


図１-1

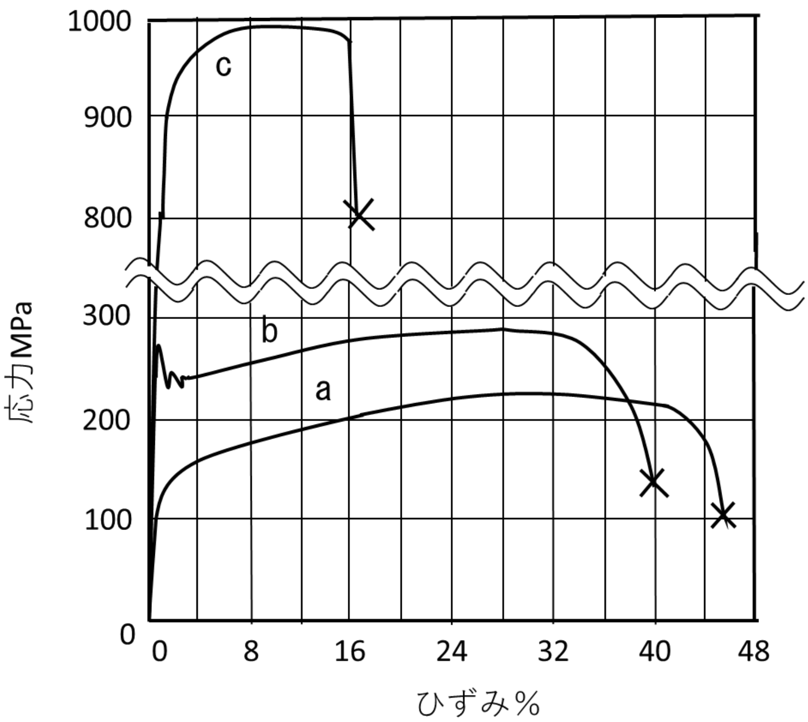


図１-2

（次ページに続く）

問２　以下の問題文の⑤～⑫のうち，⑥と⑪には右もしくは左を，その他には最も適した数値を答えよ。

図２のように，棒１と棒２が剛体壁 A と D に固定されている。棒１と棒２は C で接合され，B には右向きに$F = 10\ \mathrm{kN}$ の力が作用している。棒１の長さは$0.4\ \mathrm{m}$，棒２の長さは$0.3\ \mathrm{m}$であり，B は剛体壁 A から$0.2\ \mathrm{m}$ 離れている。棒１の縦弾性係数は$200\ \mathrm{GPa}$，棒２の縦弾性係数は$100\ \mathrm{GPa}$，棒１と棒２の断面積はどちらも$100\ \mathrm{mm}^2$とする。なお，応力は引張の場合を正，圧縮の場合を負とする。棒の自重による変形や断面内の応力分布は無視してよい。

(1) 棒が剛体壁 A から受ける反力をR_A，剛体壁 D から受ける反力をR_Dとすると，R_Aは左向きに ⑤ kN，R_Dは ⑥ 向きに ⑦ kN である。

(2) AB 間に生じている応力は ⑧ MPa，BC 間に生じている応力は ⑨ MPa，CD 間に生じている応力は ⑩ MPaである。

(3) Fが加わることにより，C は ⑪ 向きに ⑫ μm変位する。

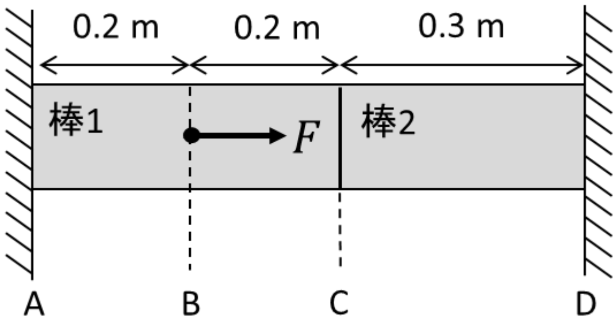


図２

（次ページに続く）

問３　以下の問題文の⑬から⑳に最も適した式もしくは数値を答えよ。

図３に示すように，長さ$2L$，曲げ剛性EI のはりが点 A と点 B で単純支持されている。はりの中央（点 C）からy方向にδ 離れた位置に支持端を設置し，点 A から$x=\frac{3}{2}L$離れた位置に集中荷重Pを作用させてはりを支持端に接触させる。なお，はりの高さは無視できるものとする。ここで，はりの中央（点 C）において，はりが支持端から受ける上向きの反力R_C を外力に置き換え，はり AB に R_C とP が単独で作用している場合を別々に解き，これらの解を重ね合わせることで，点 A の未知反力 R_A を求める。はりの自重により生じる応力と変形は無視できる。

なお集中荷重P が存在せず，反力R_Cが上向きに単独で作用した場合，はり中央（点 C）のたわみy_{c_1}は$-\frac{R_C L^3}{6EI}$となる。

(1)　中央の支持端が存在せず，Pが単独で作用している場合を考える。点 A での上向きの反力R_Aは［　⑬　］，$0\leq x\leq\frac{3}{2}L$で発生している曲げモーメントMはP,xを用いて［　⑭　］，$\frac{3}{2}L\leq x\leq 2L$で発生している曲げモーメント$M$ はP,x,Lを用いて［　⑮　］と表せる。また，はりの中央（点 C）で発生しているたわみy_{c_2}をP，L，EIを用いて表すと［　⑯　］となる。

(2)　PとR_Cが同時に作用した場合を考える。P とR_Cが単独で作用した場合のはり中央（点 C）でのたわみ（y_{c_1}およびy_{c_2}）を重ね合わせると，$\delta=y_{c_1}+y_{c_2}$ となり、P，R_C，L，EIを用いて表すと$\delta=$［　⑰　］となる。$\delta=0$のとき，R_Cは［　⑱　］，R_Aは上向きを正の方向とすると［　⑲　］となる。また，$\delta=\frac{PL^3}{32EI}$のときにはR_Aは［　⑳　］となる。

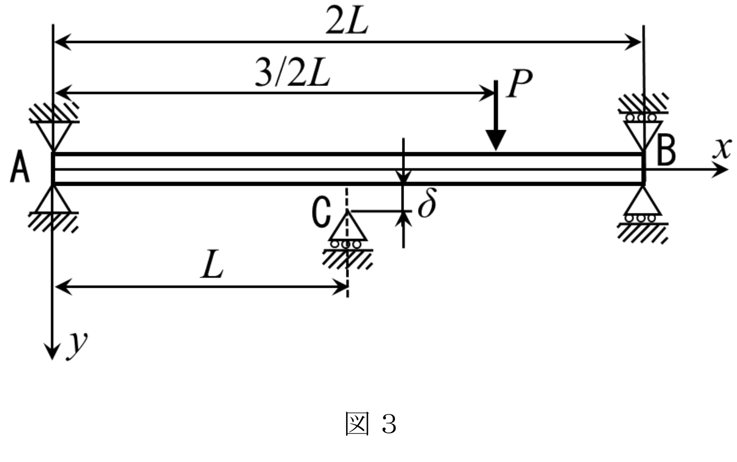


図３

（問題１　終わり）

問題２（機械力学）

問１　以下の設問に答えよ。

(1)　図１に示すように，平面内に拘束された質量 m の一様な円板が中心軸でばね定数 k のばねと粘性減衰係数 c のダンパで支持されている。この円板が常に床に接して滑ることなく転がるとき，以下の(a)～(e)の各文において，２つの下線部が両方正しい場合には「正しい」と答え，誤りがあれば誤っている部分を訂正せよ。

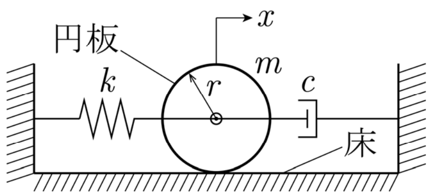


図 1

(a)　ばねの復元力とダンパの減衰力が線形特性を持つ場合,復元力は変位に<u>比例</u>し，減衰力は速度に<u>反比例</u>する。

(b)　図１に示した系の自由度は <u>1</u> であり，円板の中心軸周りの慣性モーメントを I とすると，運動方程式は

$\underline{\left(m+\dfrac{I}{2r^2}\right)\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0}$ となる。

(c)　円板の中心軸周りの慣性モーメント I は $\underline{mr^2}$ であり，不減衰固有角振動数 ω_n は $\underline{\sqrt{\dfrac{2k}{3m}}}$ で表される。

(d)　ダンパの減衰比 ζ は $\underline{\dfrac{c\omega_n}{m}}$ で表され，不足減衰状態となる条件は $\underline{\zeta>0}$ である。

次に,円板と床の摩擦が０となり円板が転がらず x 方向に振動する場合を考える。

(e)　この場合の不減衰固有角振動数 ω_n' は $\underline{\sqrt{\dfrac{k}{2m}}}$ で表され，転がり摩擦があるときよりも<u>低く</u>なる。

(2)　以下の空欄①～⑩のそれぞれに当てはまる最も適切な数値または語句を答えよ。

(f)　正弦加振力が作用する１自由度減衰振動系において，変位振幅倍率で表した周波数応答曲線の共振点となる振動数は，系の不減衰固有振動数 f_n よりも $\boxed{\text{①}}$。励振振動数が共振振動数より十分高くなると，変位振幅倍率の大きさは $\boxed{\text{②}}$ に漸近する。

（次ページに続く）

(g) 2 質点集中質量系で表される 2 自由度非減衰振動系の固有モードのうち，固有振動数が低い方の固有モードは 2 つの質点の位相差が $\boxed{③}$ となり，固有振動数が高い方の固有モードは 2 つの質点の位相差が $\boxed{④}$ となる。

(h) 非減衰振動系（主系）に減衰を持つ動吸振器を設置し，動吸振器の減衰が非常に小さい場合，動吸振器の固有振動数を励振振動数と等しくすると，主系の振動振幅は非常に $\boxed{⑤}$ くなるが，動吸振器の減衰を大きくすると主系の振動振幅は $\boxed{⑥}$ くなる。

(i) n 自由度非減衰振動系の解を，固有モードの $\boxed{⑦}$ 性を利用して，n 個の 1 自由度系の解の重ね合わせで表すことができる。このような解析法を $\boxed{⑧}$ 解析という。

(j) 両端を固定された一様な密度を持つ弦の固有振動数は，弦の張力が大きくなると $\boxed{⑨}$ くなり，弦の長さが長くなると $\boxed{⑩}$ くなる。

（次ページに続く）

問 2　図 2 に示すように，2 つの質点と，質量が無視できる 2 つのばねと，1 つのダンパからなる 2 自由度振動系について考える。質点の質量をそれぞれm，ばねのばね定数をそれぞれk，ダンパの粘性減衰係数をcとする。床面と質点との摩擦は無視できるものとする。質点 1 に調和外力$A\sin\Omega t$が作用する場合を考える。ただし，Ωは外力の角振動数，Aは外力の振幅で，それぞれ定数とする。tは時間である。質点 1，2 の平衡点からの変位をそれぞれx_1，x_2として以下の問いに答えよ。

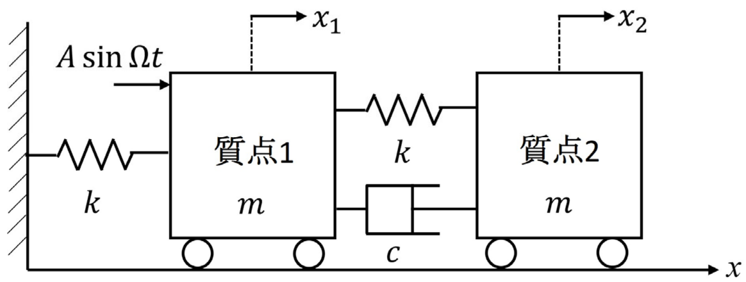


図 2

(1)　質点 1, 2 のそれぞれに対して運動方程式を示せ。

(1)で示した運動方程式は，定常応答を$x_1 = X_1 e^{i\Omega t}$，$x_2 = X_2 e^{i\Omega t}$，調和外力を$Ae^{i\Omega t}$とおいて解くことができる。ただし，$\gamma = c/(2\sqrt{mk})$，$\omega = \sqrt{k/m}$，$X_s = A/k$とする。iは虚数単位，eは自然対数の底である。

(2) $c = 0$の場合について，以下の問いに答えよ。

(i) (1)で示した運動方程式を，ω，Ωを用いて空欄①②に適切な数式を入れて以下のように整理せよ。

$$\boxed{\quad ① \quad} X_1 - \omega^2 X_2 = \frac{A}{m}$$

$$\boxed{\quad ② \quad} X_1 + (-\Omega^2 + \omega^2) X_2 = 0$$

(ii) ω，Ω，X_sを用いて空欄③④に適切な数式を入れ，X_1，X_2を求めよ。

$$X_1 = \frac{\boxed{\quad ③ \quad}}{\{1-(\Omega/\omega)^2\}\{2-(\Omega/\omega)^2\}-1}$$

$$X_2 = \frac{\boxed{\quad ④ \quad}}{\{1-(\Omega/\omega)^2\}\{2-(\Omega/\omega)^2\}-1}$$

(iii) $X_1 = 0$となる場合，x_2をX_s，Ω，tを用いて表せ。

（次ページに続く）

(3) $c \neq 0$の場合について，上記と同様に定常応答を考える。γの値が 0.005，0.05，0.5 のとき，周波数特性を表す最も適切なグラフの形を図 3 の(a)～(c)からそれぞれ選べ。

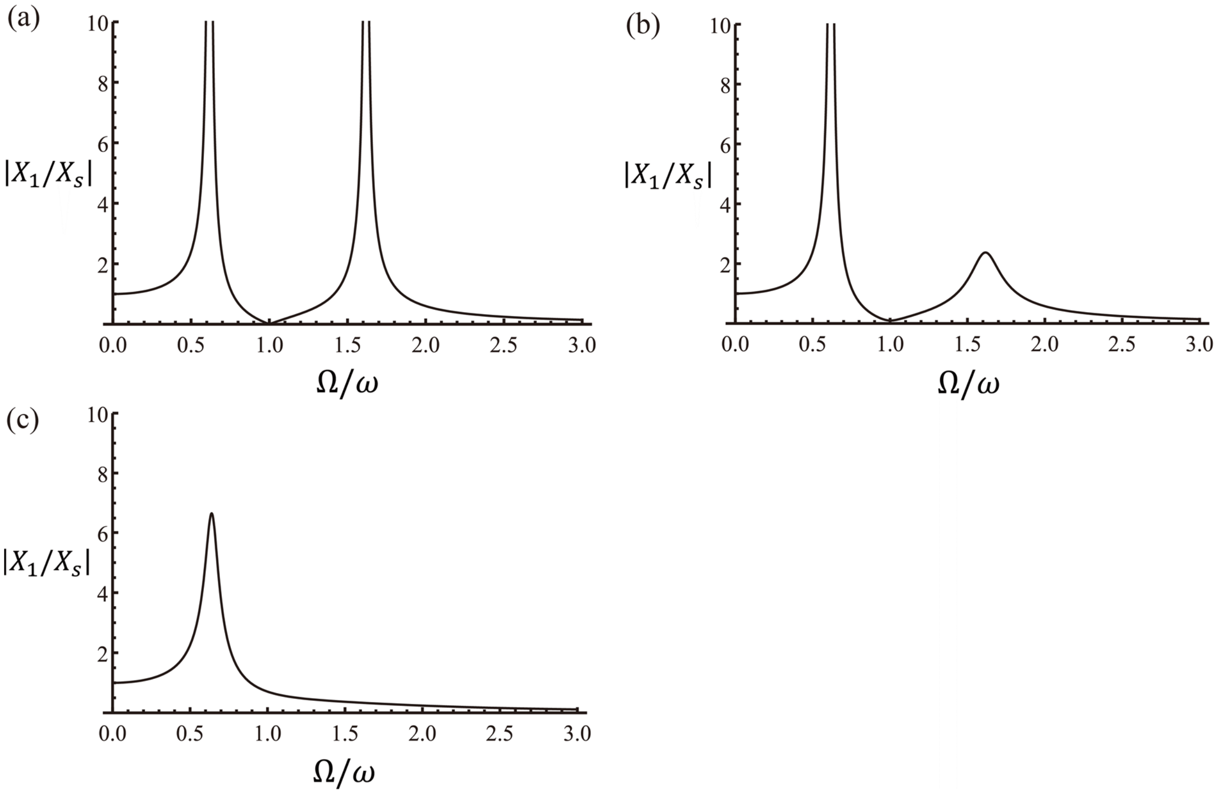


図 3

（問題２　終わり）

問題３（熱力学）

以下の問１から問４は選択肢の中から最も適切なものを，問５は選択肢の中から適切なものを全て選び，記号で答えよ。なお，同じ記号を複数回用いてよい。また，c_p は定圧比熱，c_v は定積比熱，p は圧力，q は熱量，R_0 は一般気体定数（8.31 J/(mol･K)），R は気体定数，s は比エントロピー，T は温度，u は比内部エネルギー，V は体積，v は比体積とする。

問１　ランキンサイクルの基本構成を図１に示す。ランキンサイクルは，ボイラ，タービン，機器（　①　），機器（　②　）により構成される。1，2，3，4 はそれぞれ，（　①　）と（　②　）の間，（　②　）とボイラの間，ボイラとタービンの間，およびタービンと（　①　）の間の状態を表している。液水は（　②　）で（　③　）され（1→2），ボイラで（　④　）されて蒸気になる(2→3)。その後，タービンで蒸気は（　⑤　）されて湿り蒸気になり(3→4)，（　①　）で（　⑥　）されて液に戻る（4→1）。図中の 1，2，3，4 における比エンタルピーを h_1, h_2, h_3, h_4 として，大きい順に並べると（　⑦　），（　⑧　），h_2，（　⑨　）となる。

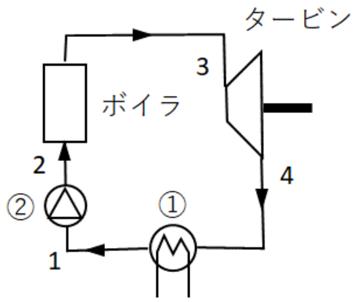


図１

【選択肢】　ア：発電機，イ：復水器，ウ：製氷機，エ：給水ポンプ，オ：膨張器，カ：等温膨張，キ：等温圧縮，ク：等圧膨張，ケ：等圧圧縮，コ：等圧冷却，サ：等圧加熱，シ：断熱膨張，ス：断熱圧縮，セ：h_1，ソ：h_3，タ：h_4

問２　以下の理想気体に関する問いに答えよ。

(1) 毎分 6 kg ずつ取り込まれた 5 ℃，100 kPa の空気を成績係数 3 のヒートポンプで 35 ℃に等圧加熱する。この時，ヒートポンプに投入する動力は（　①　）W である。ただし，空気の定圧比熱を 1 kJ/(kg･K)とする。

(2) 滑らかに動くピストン付きシリンダ内に空気 3 kg を 1×10^5 Pa，300 K（状態 1）で封入し，等温圧縮して 5×10^5 Pa（状態 2）にする。状態 1 と 2 の間に外部から空気に与えられる仕事と熱量の絶対値はそれぞれ（　②　）J，（　③　）J となる。さらにその後，等圧加熱し，体積を初期の大きさに戻した。そのときの温度は（　④　）K，またそのために外部にする仕事の絶対値は（　⑤　）J である。ただし，空気の分子量を 30 とし，必要に応じて ln(2) = 0.7，ln(3) = 1.1，ln(5) = 1.6 を用いてよい。

【選択肢】　ア：1.0×10^3，　イ：1.5×10^3，　ウ：4.0×10^3，　エ：6.0×10^3，　オ：8.3×10^3，カ：1.0×10^4，　キ：1.5×10^4，　ク：4.0×10^4，　ケ：6.0×10^4，　コ：8.3×10^4，　サ：1.0×10^5，シ：1.5×10^5，　ス：4.0×10^5，　セ：6.0×10^5，　ソ：8.3×10^5，　タ：1.0×10^6

（次ページに続く）

問３　大気圧で 2 kg の氷がすべて水に変化したときのエントロピー変化を求めよ。ただし，融解熱は 334 kJ/kg とする。

【選択肢】　ア：1.22 kJ/K，イ：1.45 kJ/K，ウ：2.22 kJ/K，エ：2.45 kJ/K，オ：3.22 kJ/K

問４　単位質量の理想気体からなる系について以下の問に答えよ。対象とする系が可逆断熱変化をする。このとき，エネルギー保存則から次式が得られる。

$$\delta q = c_{\mathrm{v}}\ (\quad ①\quad) + (\quad ②\quad) = 0 \tag{1}$$

一方，状態方程式の微分より次式が得られる。

$$(\quad ③\quad)\ dv + (\quad ④\quad)\ dp = (\quad ⑤\quad) \tag{2}$$

式(2)を式(1)に代入することで以下の関係が得られる。

$$c_{\mathrm{p}}\ (\quad ⑥\quad) + c_{\mathrm{v}}\ (\quad ⑦\quad) = 0 \tag{3}$$

以上よりγを比熱比として以下の関係が得られる。

$$pv^{\gamma} = 一定 \tag{4}$$

【選択肢】　ア：p，　イ：q，　ウ：s，　エ：T，　オ：u，　カ：v，　キ：dp，
ク：dq，　ケ：ds，　コ：dT，　サ：du，　シ：dv，　ス：pv，　セ：v/p，ソ：RT，
タ：vdp，　チ：pdv，　ツ：RdT，　テ：$(1/v)\ dp$，　ト：$(1/p)\ dv$，ナ：$(1/R)\ dT$

問５　温度 T_1，圧力 p_1 の理想気体１モルが体積 V_1 の容器 A に封入されている。容器 A は真空容器 B と接続されており，その間にバルブが設置されている。２つの容器 A と容器 B の体積の和は V_2 である。バルブをゆっくり開き，気体が断熱的に自由膨張して２つの容器を満たした。このときの理想気体の温度は T_2，圧力は p_2 である。バルブを開く前後のエントロピー差を表す式で適切なものを全て選べ。

【選択肢】　ア：$R_0 \times \ln(V_2/V_1)$，イ：$R_0 \times \ln(V_1/V_2)$，ウ：$R_0 \times \ln(p_2/p_1)$，エ：$R_0 \times \ln(p_1/p_2)$，
オ：$R_0 \times \ln(T_2/T_1)$，カ：$R_0 \times \ln(T_1/T_2)$

（問題３　終わり）

問題４（流体力学）

問１　完全流体中の物体に働く流体力に関して記述した以下の文章の【　　】には適切な選択肢を，(　　)には該当する数式を答えよ。ただし，流体の密度は ρ とする。

(1) 複素平面 $z(=x+iy)$面上のx軸に平行な速度Uの一様流中に置かれた半径aの円柱周りの流れを考える。この流れの複素速度ポテンシャル$W_1(z)$は，次式で表される。

$$W_1(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \tag{1}$$

複素速度ポテンシャルの実部Φは【　①　〔ア：速度ポテンシャル，イ：流れ関数，ウ：渦度〕】を表し，Φを用いて円周(θ)方向の速度成分v_θは$v_\theta = (1/r)\partial\Phi/\partial\theta$ と求められる。式(1)に$z = re^{i\theta}$を代入すると，$W_1(z)$の実部$\Phi_1 =$（　②　）を得る。このΦ_1から，円柱表面$(r=a)$におけるv_θは$v_\theta|_{r=a} =$（　③　）と求められる。

次に，図１に示すように，x軸に対して角度αを有する一様流(速度U)中に置かれた半径aの回転円柱(循環Γ)周りの流れを考える。ただし，Γは反時計回りを正とする。この流れを表す複素速度ポテンシャル $W_2(z)$は，

$$W_2(z) = U\left((\quad ④ \quad) + \frac{a^2}{ze^{-i\alpha}}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z \tag{2}$$

である。式(2)に$z = re^{i\theta}$を代入すると，$W_2(z)$の実部$\Phi_2 =$（　⑤　）を得る。円柱表面$(r=a)$におけるv_θを求めると

$$v_\theta|_{r=a} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\bigg|_{r=a} = -2U\sin(\theta-\alpha) + (\quad ⑥ \quad) \tag{3}$$

となる。ここで，円柱上の点 A$(z=a)$では，$v_\theta = 2U\sin\alpha +$（　⑥　）である。$\Gamma$の値が特定の範囲にある場合，流れは円周上に２つのよどみ点を持つ。よどみ点 S_1が点 A に重なり，点 A でのv_θがゼロとなるのは

$$\Gamma = (\quad ⑦ \quad) \tag{4}$$

の場合である。ジューコフスキー変換 $\zeta = z +$（　⑧　）を用いると，図１の流れは図２に示す$\zeta(=\xi + i\eta)$面における平板(有限長さの線分)を過ぎる流れに写像される。すなわち，半径 a の円柱は長さ（　⑨　）の線分に写像される。また，よどみ点S_1はよどみ点S_1'に写像される。よどみ点S_1'が後端点 A$'$に一致する場合，平板の上側と下側を通る流れは後端点において滑らかに接続される。よって，循環Γは式(4)で与えられる。この平板に働く揚力F_L は，【　⑩　〔ア：トリチェリ，イ：クッタ・ジューコフスキー，ウ：ヘルムホルツ〕】の定理により，αを用いて

$$F_L = (\quad ⑪ \quad) \tag{5}$$

と求まる。また，平板に働く原点回りのトルクTは，ブラジウスの第２定理より，

$$T = -2\pi a^2 \rho U^2 \sin 2\alpha \tag{6}$$

と求まる。

（次ページに続く）

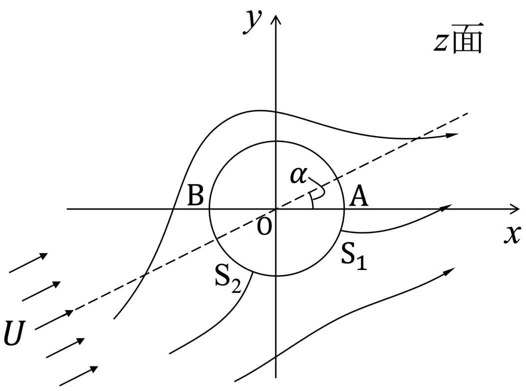


図１

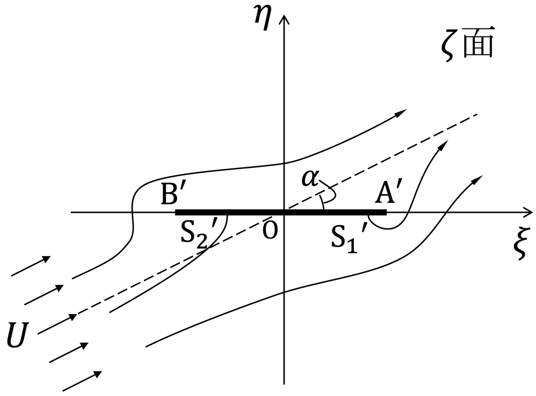


図２

(2) 写真１のような縦型ブラインドを考える。複数の帯状のスラットが等間隔に窓面に沿って吊られている。それぞれのスラットは図３に示すようにスラット断面の中点を通る鉛直軸まわりの回転のみ可能であり，並進運動も変形もしない。また，簡単のためにすべてのスラットは連動して外力に対して自由に回転すると仮定する。スラットの回転角β $(0 < \beta < \pi/2)$は窓面法線とスラットがほぼ一致する場合(βがわずかに正の場合)を開放状態と定義し，時計回りを正とする。

採光と換気のためにスラットを開放した。静止状態にあるスラットの間を窓面の法線方向から風が室内に流れ込み始めた。直後のスラットの動きについて４０字以内で説明せよ。なお，上記の問１(1)で議論した平板翼に働く力と同様の力がスラットに働くと仮定せよ。

写真１

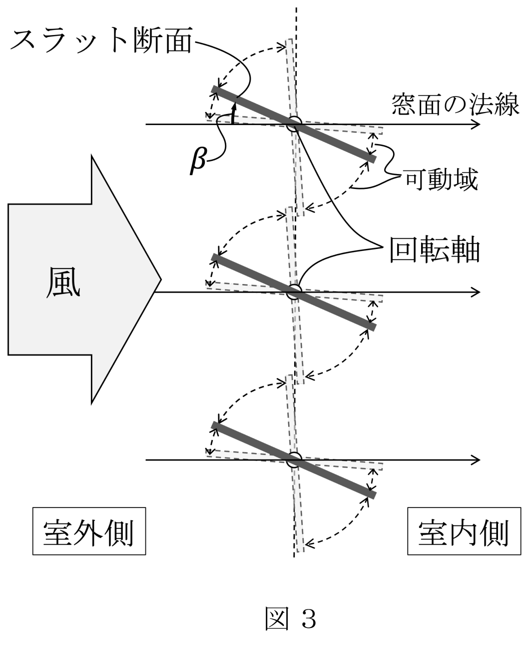


図３

（次ページに続く）

問 2　以下の文章の【　　】には適切な選択肢を，(　　)には該当する数式を答えよ。ただし，非圧縮性の実在流体を仮定でき，重力の影響は無視できるものとする。

図 1(a)のように，速度 U_∞の一様流中におかれた二次元対称翼を考える。翼長をℓ，翼厚を h とし，迎え角はゼロである。流体の密度はρである。この翼に働く単位翼長(紙面奥行き方向の単位長さ)あたりの全抗力を F_D とし，ここでは抗力係数 C_D を $C_\mathrm{D}=F_\mathrm{D}/(0.5\rho U_\infty{}^2 h)$とする。図 1(b)は，この翼の翼弦長と翼厚の比(ℓ/h)と C_D の関係を示している。全抗力に対して，ℓ/h が小さいときは【　①　〔ア：圧力抵抗，イ：摩擦抵抗〕】の寄与が大きく，ℓ/h が大きいときは【　②　〔ア：圧力抵抗，イ：摩擦抵抗〕】の寄与が大きい。境界層が層流境界層から乱流境界層に遷移すると，摩擦抵抗は【　③　〔ア：大きくなる，イ：小さくなる〕】。

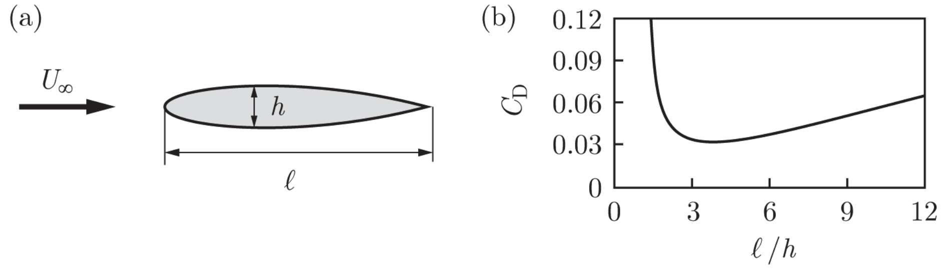


図 1

次に，ℓ/h が十分大きい場合に，全抗力 F_D を翼下流の全圧と静圧の計測値から算出することを考える。図 2 のように，一様流の方向を x 方向，一様流に垂直な方向を y 方向とする。翼の影響を受けない十分上流の断面 A での全圧，静圧，x 方向の速度成分を，それぞれ $p_{\mathrm{t}\infty}$，p_∞，U_∞とし，これらは既知とする。断面 B の全圧，静圧，x 方向の速度成分をそれぞれ $p_{\mathrm{t}2}(y)$，$p_2(y)$，$u_2(y)$とし，$p_{\mathrm{t}2}(y)$と $p_2(y)$は既知の計測値とする。断面 B で流れは定常であり，その断面の静圧は翼の影響を受けて y 方向に一様ではないとする。ここで，十分下流の断面 C を考え，その位置の全圧，静圧，x 方向の速度成分を $p_{\mathrm{t}3}(y)$，$p_3(y)$，$u_3(y)$とする。断面 C での静圧は y 方向に一様とし，

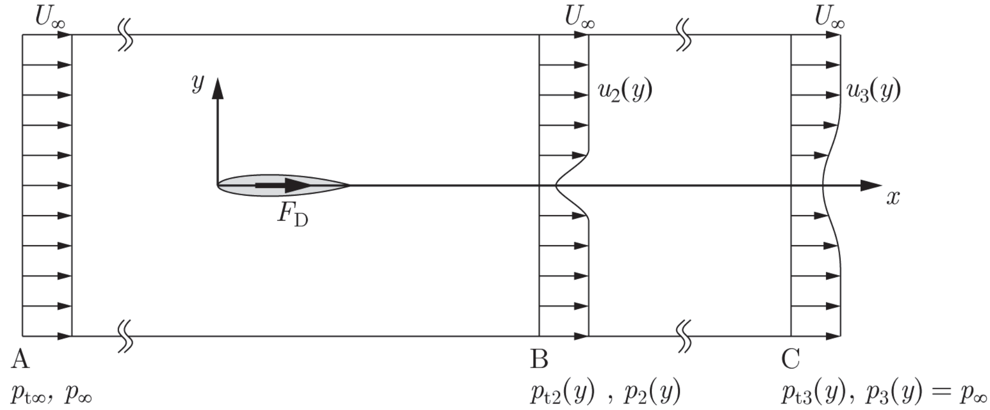


図 2

（次ページに続く）

$p_3(y)=p_\infty$である。また，断面 B と断面 C の間で損失は無く，断面 B で y を通過する流線は断面 C で y_3 を通過するものとする。同じ流線上の全圧は変化しないので，$p_{t2}(y)=p_{t3}(y_3)$である。さらに，断面 B と断面 C での y 方向の速度成分の絶対値は，x 方向の速度成分の大きさに対して無視できるほど小さいとする。

全抗力 F_D は，翼の上流側と下流側の間の運動量欠損に等しい。この運動量欠損は，単位時間あたりに断面 A と断面 C の間で失われる運動量であり，

$$F_D = \int_C \rho u_3(y_3)\,(\quad ④ \quad)\,dy_3 \tag{1}$$

となる。ここで，断面 B で dy，断面 C で dy_3 を通る流管を考える。この流管における【 ⑤ 〔ア：エネルギー，イ：運動量，ウ：質量〕】保存から

$$\rho u_2(y)dy = \rho u_3(y_3)dy_3 \tag{2}$$

となる。よって，式(1)と式(2)から

$$F_D = \int_C \rho u_3(y_3)\,(\quad ④ \quad)\,dy_3 = \int_B \rho u_2(y)\,(\quad ④ \quad)\,dy \tag{3}$$

となる。また，ベルヌーイの定理より

$$p_{t\infty} = p_\infty + \frac{\rho}{2}U_\infty{}^2 \tag{4}$$

$$p_{t2}(y) = (\quad ⑥ \quad) + \frac{\rho}{2}u_2(y)^2 \tag{5}$$

$$p_{t3}(y_3) = p_\infty + (\quad ⑦ \quad) \tag{6}$$

となる。これらの関係から式(3)は

$$F_D = \int_B (\quad ⑧ \quad)\,dy \tag{7}$$

となり，F_D を断面 B での $p_{t2}(y)$と $p_2(y)$，および断面 A での $p_{t\infty}$と p_∞のみで表すことができる。

（問題４　終わり）

問題５（工業数学）

問１　以下の各問いに答えよ。

(1) 水平に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとり，細いヒモの両端を x 座標が $-L$ および L の 2 点で固定したところ，

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad (-L \leq x \leq L)$$

で表される曲線を描いた。ただし，e は自然対数の底，a は定数である。このヒモの長さを求めよ。

(2) 微分方程式

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

の一般解を求めよ。$x = e^u$ による変数変換を用いてもよい。

問２　ガウスの発散定理を用いて，次の式を三重積分に変換して計算し，定数 a, b を用いて表せ。

$$\iint_S (x^3 dydz + x^2 ydzdx + x^2 zdxdy)$$

S は円柱 $x^2 + y^2 = a^2 \ (0 \leq z \leq b)$ と，二つの円板 $z = 0,\ b$ における $x^2 + y^2 \leq a^2$ よりなる閉曲面である。$\int \sin^4 t\, dt = \frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t + C$　（C は積分定数）を用いてもよい。

問３　以下の各問いに答えよ。ただし i を虚数単位とする。

(1) $z^4 + z^2 + 1 = 0$ をみたす複素数 z を全て求めよ。

(2) 次の周回積分を求めよ。積分路 C は複素平面上の閉曲線 $|z + i| = 1$ を反時計回りに 1 周するものとする。

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 + z^2 + 1}$$

問４　以下の式の空欄 $\boxed{\ ①\ }$ ～ $\boxed{\ ⑤\ }$ に入る適切な数式もしくは数値を記せ。
関数 $f(x)$ をフーリエ変換可能な関数とするとき，$f(x)$ のフーリエ変換 $F(\alpha)$ は次式で表される。ここで i は虚数単位である。

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x}\, dx$$

（次ページに続く）

また，その逆変換により関数 $f(x)$ は次式のように表される。

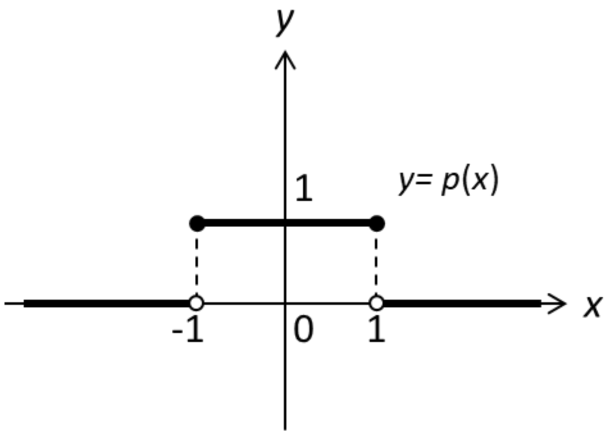
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha$$

さらに，パーシバルの公式と呼ばれる次式が成立する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2\,d\alpha$$

いま，以下に示す関数 $p(x)$ を考える。

$$p(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < -1, 1 < x) \end{cases}$$



この関数 $p(x)$ のフーリエ変換 $P(\alpha)$ は，

$$P(\alpha) = \frac{2}{\alpha}\boxed{\quad ① \quad}$$

と表される。したがって，$p(x)$ は以下のように表される。

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\alpha}\boxed{\quad ① \quad}\; e^{i\alpha x}\,d\alpha$$

ここで，$p(0) = 1$であることを踏まえると次式が成立する。

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \boxed{\quad ② \quad}$$

また，次式は値を求めることができ，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{p(x)\}^2\,dx = \boxed{\quad ③ \quad}$$

となるので，パーシバルの公式を用いると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\right)^2 d\alpha = \boxed{\quad ④ \quad}$$

となり，よって次式が成立する。

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx = \boxed{\quad ⑤ \quad}$$

（問題５　終わり）