筆答専門試験科目（午前） ２０２２ 大修

物理学系 時間 ９：３０－１１：３０

物 理 学 (午 前)

受 験 番 号

注意事項

１． 次ページ以降の３題すべてに解答せよ。

２． 答案用紙は３枚である。

３． 解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

４． 各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

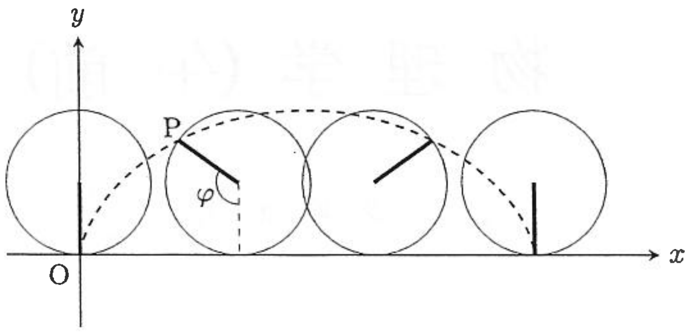
５． 答案用紙は，解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

６． 問題冊子および計算用紙の第１ページに受験番号を記入せよ。

７． 問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1

[A] 下図のように，半径 a の円板が x 軸上をすべらずに転がるとき，円板上に固定された点 P が描く軌跡を**サイクロイド**という。点 P は最初原点 O にあるものとし，円板が角度 φ (ただし $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ とする) 回転したときの点 P の位置を点 $\mathrm{P}(\varphi)$ と表すこととする。

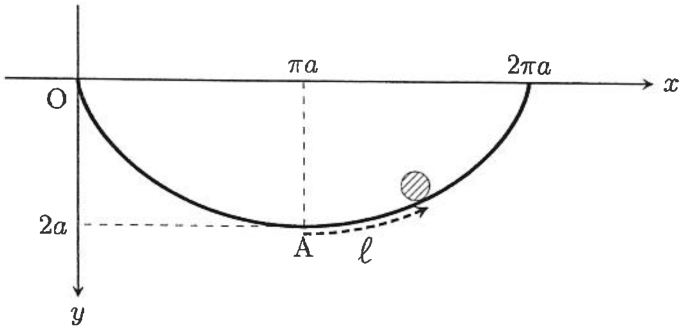


(1) 点 $\mathrm{P}(\varphi)$ の座標 $(x(\varphi), y(\varphi))$ を求めよ。解答欄には答のみを記入すること。

(2) $\Delta\varphi$ を微小角度とするとき，サイクロイド上の点 $\mathrm{P}(\varphi)$ と点 $\mathrm{P}(\varphi+\Delta\varphi)$ を結ぶ線分の長さを求めよ。ただし，$\Delta\varphi$ の 2 次以上の項は無視すること。解答欄には答のみを記入すること。

(3) 原点 O から点 $\mathrm{P}(\varphi)$ までの，サイクロイドに沿った長さを求めよ。解答欄には答のみを記入すること。

[B] [A] で導入したサイクロイドを上下反転し，サイクロイドに沿って摩擦なく運動する質量 m の質点を考える。ここで座標軸を下図のように取ることで，(1) で求めた媒介変数表示をそのまま用いることができる。サイクロイドの底を点 A とする。また，重力は y 軸正の向きに働くものとし，重力加速度の大きさを g とする。



(4) 以下の小問で示すように，質点は点 A のまわりを周期的に運動する。k，p，q，r を無次元の定数として，運動の周期が $km^p a^q g^r$ の形で表されたとする。次元解析により，p，q，r を求めよ。解答欄には答のみを記入すること。

(5) 質点の運動エネルギー $K = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ を，m, a, φ, $\dot{\varphi}$ を用いて表せ。ここで，変数の上につけたドット記号 ($\dot{}$) は時間微分を表す。解答欄には答のみを記入すること。

(6) 図に示すように，点 A から質点までの，サイクロイドに沿った長さを ℓ とおく。ただし，$0 \leq x < \pi a$ のとき $\ell < 0$，$\pi a < x \leq 2\pi a$ のとき $\ell > 0$ となるように，ℓ の符号を定める。ラグランジアンを m, a, g, ℓ, $\dot{\ell}$ を用いて表せ。

(7) オイラー・ラグランジュ方程式により，$\ddot{\ell}$ を，m, a, g, ℓ, $\dot{\ell}$ のうち必要なものを用いて表せ。

(8) (7) の結果より，質点は点 A を中心とする単振動をすることが分かる。単振動の周期 T を求めよ。解答欄には答のみを記入すること。

[C] [B] と同じサイクロイド上を摩擦なく運動する質点の位置を，(6) で導入した符号付きの長さ ℓ により表すことにする。時刻 $t=0$ において，質量 m の質点1を $\ell=L\ (L>0)$ の点に，質量 $2m$ の質点2を $\ell=0$ の点Aに，それぞれそっと置いた。質点1と質点2は完全弾性衝突をするものとする。

(9) 時刻 $t=0$ から $t=T$ までの，質点1の位置 $\ell_1(t)$，質点2の位置 $\ell_2(t)$ を解答欄に図示せよ。解答欄には，時刻 t を横軸，位置 ℓ を縦軸とする座標軸を記してある。ただし，$\ell_1(t)$を実線，$\ell_2(t)$を破線で描き，$t=\frac{1}{4}T,\ \frac{1}{2}T,\ \frac{3}{4}T,\ T$ における質点1，質点2の位置が分かるよう，グラフに明記すること。

（このページは落丁ではありません。）

2

電荷と電磁場に関する以下の問いに答えよ。ここでは，特に断らない限り極座標表示を用いることとし，位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

と表される。また，ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(r,\theta,\varphi)$ を極座標系での各成分 v_r, v_θ, v_φ を用いて

$$\boldsymbol{v}(r,\theta,\varphi) = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

と表す。ここで，$\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ は極座標表示における単位ベクトルであり，直交座標系で書くと

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r =&(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),\\
\boldsymbol{e}_\theta =&(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta),\\
\boldsymbol{e}_\varphi =&(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)
\end{aligned}$$

である。以下では真空の誘電率を ϵ_0，真空の透磁率を μ_0，真空中の光速を $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ とし，必要ならスカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = f(r,\theta,\varphi)$ の勾配およびベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ の発散，回転に関する公式

$$\begin{aligned}
\nabla f =&(\partial_r f)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}(\partial_\theta f)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}(\partial_\varphi f)\boldsymbol{e}_\varphi,\\
\nabla\cdot\boldsymbol{v} =&\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi v_\varphi,\\
\nabla\times\boldsymbol{v} =&\frac{1}{r\sin\theta}\left[\partial_\theta(v_\varphi\sin\theta) - \partial_\varphi v_\theta\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi v_r - \partial_r(r v_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta\\
&+ \frac{1}{r}\left[\partial_r(r v_\theta) - \partial_\theta v_r\right]\boldsymbol{e}_\varphi
\end{aligned}$$

を用いてよい。ただし，$\partial_r = \dfrac{\partial}{\partial r}$，$\partial_\theta = \dfrac{\partial}{\partial\theta}$，および $\partial_\varphi = \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ である。解答欄には答のみを記入すること。

[A] 真空中に電荷 q に帯電した半径 a の導体球がある。

(1) この導体球の $r \leq a$ および $r > a$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ。ただし，導体球の中心が原点になるように座標をとり，無限遠点における電位を $\lim_{r\to\infty}\phi(\boldsymbol{r}) = 0$ とする。

(2) 静電エネルギー U を求めよ。

(3) この導体球を囲むように，原点を中心とした電荷 $-q$ に帯電した十分に大きな球殻があると考えることで，この導体球をコンデンサーと見なすことができる。この導体球の電気容量 C を求めよ。

[B] 真空中において，xy 平面上で原点を中心に回転している点電荷の対による電磁波の放射を考える。電荷 q の点電荷が直交座標系で

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \left(\frac{d}{2}\cos\omega t, \frac{d}{2}\sin\omega t, 0\right)$$

にあり，$-q$ の点電荷が $-\boldsymbol{r}_0(t)$ にある。ここで ω および d は正定数であり，t は時刻である。原点にある電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}(t)$ のつくるスカラー・ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ およびベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ が

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}, t) =& \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{p}(t-r/c)\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} + \frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t-r/c)\cdot\boldsymbol{r}}{cr^2}\right], \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) =& \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\boldsymbol{p}}(t-r/c)\end{aligned}$$

で与えられることを用いてよい。ここで，$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt}$ である。

(4) この点電荷の対がつくるスカラー・ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ およびベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ の $r \gg c/\omega$，$r \gg d$ における漸近形を r^{-1} のオーダーまで求めよ。

(5) (4) の漸近形を用いて電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ および磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ の漸近形を r^{-1} のオーダーまで求めよ。

(6) この点電荷の対が動径方向に放射するエネルギーの流束密度の大きさを $S(\boldsymbol{r}, t)$ とする。(5) の漸近形を用いて $S(\boldsymbol{r}, t)$ の時間平均 $\bar{S}(\boldsymbol{r})$ の漸近形を求めよ。

(7) r を一定としたとき，$\bar{S}(\boldsymbol{r})$ が最も大きい方向を以下から 1 つ選べ。

i. x 軸方向
ii. y 軸方向
iii. z 軸方向
iv. x 軸方向および y 軸方向
v. xy 平面内の任意の方向
vi. 全ての方向で等しい

(8) この点電荷の対が単位時間あたりに放射する全エネルギーの時間平均 P を求めよ。

$\boxed{3}$

［A］ $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ として，下記の偏微分方程式を満たす $G(\boldsymbol{r})$ について考える。

$$(\Delta + k^2)G(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r}) .$$

ここで，Δ はラプラシアン，δ はディラックのデルタ関数を表し，k は実数とする。

(1) $G(\boldsymbol{r})$ の表式を得るために，$\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ として，$\boldsymbol{r}$ についてのフーリエ変換

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r}$$

および逆フーリエ変換

$$G(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{p}$$

を考える。$\widetilde{G}(\boldsymbol{p})$ を求めよ。

(2) (1) で得られた $\widetilde{G}(\boldsymbol{p})$ を上記の逆フーリエ変換の式に代入する。極座標を用いることで，この積分は以下のように変形できることを示せ。

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi^2 r}\int_{0}^{\infty}\frac{p\sin pr}{p^2 - k^2}dp .$$

ここで，r, p はそれぞれ $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}$ の大きさである。

(3) (2) の $G(\boldsymbol{r})$ は，以下のように書き直すことができる。

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\sin pr}{p^2 - k^2}dp .$$

この積分は，無限小の正の実数 ε を用いて k を $k + i\varepsilon$ に置き換え，留数定理を用いたのち，$\varepsilon \to +0$ とすることで計算できる。この方法によって，$G(\boldsymbol{r})$ を求めよ。導出過程には被積分関数の極の位置と積分路をあわせて図示せよ。

［B］ 次に，下記の偏微分方程式を満たす $G(\boldsymbol{r}, t)$ について考える。

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\boldsymbol{r}, t) = -\delta(\boldsymbol{r})\delta(t)\,.$$

ここで，c は正の実数とする。

(4) $G(\boldsymbol{r}, t)$ の表式は，t についてのフーリエ変換

$$\widehat{G}(\boldsymbol{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

および逆フーリエ変換

$$G(\boldsymbol{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}(\boldsymbol{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

を考えることで得られる。［A］で求めた結果を参考にして，$\widehat{G}(\boldsymbol{r}, \omega)$ および $G(\boldsymbol{r}, t)$ を求めよ。ただし，$G(\boldsymbol{r}, t)$ は $t < 0$ で常にゼロである解とする。

筆答専門試験科目（午後）　　　　　　　　　　２０２２　大修

物理学系　　　　　　　　　　　　時間　１３：３０－１５：３０

物理学（午後）

受験番号

注意事項

１．　次ページ以降の３題すべてに解答せよ。

２．　答案用紙は３枚である。

３．　解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

４．　各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

５．　答案用紙は，解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

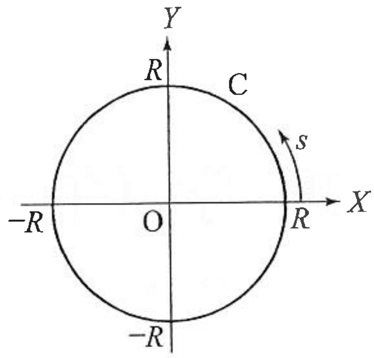
６．　問題冊子および計算用紙の第１ページに受験番号を記入せよ。

７．　問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1

X-Y 平面上の原点 O を中心とする半径 R の円 C 上を運動する質量 M の粒子について，量子力学的に考える。C に沿った座標 s を次のように定義する。

$$X = R\cos\frac{s}{R}, \quad Y = R\sin\frac{s}{R}.$$



粒子の波動関数 $\psi(s)$ は周期境界条件 $\psi(s+2\pi R)=\psi(s)$ を満足するものとする。プランク定数の $\dfrac{1}{2\pi}$ 倍を $\hbar$ として，以下の問いに答えよ。(5) と (8) については導出過程を示せ。それ以外については答のみでよい。

[A] 粒子に力が加わらず，ポテンシャルが 0 である場合について考える。

(1) C に沿った運動量 $p=-i\hbar\dfrac{d}{ds}$ の固有状態の波動関数 $\psi_n(s)$ （n は整数）およびその固有値 p_n を求めよ。ただし，$\cdots < p_{-2} < p_{-1} < p_0 = 0 < p_1 < p_2 < \cdots$ となるように番号をつける。波動関数は規格化すること。

(2) $\psi_n(s)$ はハミルトニアン $H=\dfrac{p^2}{2M}$ の固有状態である。そのエネルギー固有値 E_n を求めよ。

(3) 行列要素 $\langle m|X|n\rangle$ を求めよ。ただし，波動関数 $\psi_n(s)$ に対応する状態のブラベクトル，ケットベクトルをそれぞれ $\langle n|$ および $|n\rangle$ とする。

[B] 粒子に対して X 軸正の向きに一定の大きさ F の外力を加えた。これによりポテンシャル $V=-FX$ が生じた。F が小さい摂動として扱えるものとする。

(4) ハミルトニアン $H'=H+V$ の基底状態のエネルギー固有値 E'_0 を $F=0$ の周りの展開として次のように置く。

$$E'_0 = E_0 + \alpha_1 F + \alpha_2 F^2 + \cdots$$

係数 α_1 と α_2 を M, R, $\hbar$ のうち必要なものを用いて表せ。

(5) ハミルトニアン H' の基底状態にある粒子が，外力を瞬間的に取り除いたあと $|0\rangle$ 以外の状態にある確率 P は

$$P = \beta F^2 + \cdots$$

である。ただし $\cdots$ は F について高次の項を表す。係数 β を M，R，$\hbar$ のうち必要なものを用いて表せ。

[C] 粒子に対して X 軸正の向きに一定の大きさ F の外力を加えた。これによりポテンシャル $V = -FX$ が生じた。今度は F が大きい場合を考える。必要であれば，積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-as^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

を用いてよい。

(6) 古典的には，エネルギーが小さい時，粒子は $s = 0$ の近傍で周期的運動を行う。$|s| \ll R$ を仮定し，ポテンシャルを s の関数として表せ。s について 3 次以上の項は無視する近似を行うこと。

(7) (6) で求めたポテンシャルを用い，ハミルトニアン $H' = H + V$ の基底状態のエネルギー固有値 E'_0 を F，M，R，$\hbar$ のうち必要なものを用いて表せ。

(8) ハミルトニアン H' の基底状態にある粒子が，外力を瞬間的に取り除いたあと状態 $|0\rangle$ にある確率 P' を F，M，R，$\hbar$ のうち必要なものを用いて表せ。引き続き (6) で求めたポテンシャルを用いる近似を行ってよい。

2

以下の問に答えよ。T を系の温度として $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする。ただし k_{B} はボルツマン定数, c は真空中の光速, G は万有引力定数, $\hbar$ は換算プランク定数, m は電子質量, ε_0 は真空の誘電率である。

[A] 1粒子エネルギー準位が ϵ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ で与えられる, 相互作用の無い同種フェルミ粒子系を考える。

(1) $x_j = e^{-\beta\epsilon_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ とおくとき，粒子数 N の系に対する分配関数 Z_N は x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて

$$Z_N = \sum_C x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_N}$$

のように書ける。ここで $\sum_C$ はある条件 C を満たす $j_1, j_2, \ldots, j_N$ に関する和を表す。条件 C を次から選べ。ただし $1 \leq N \leq n$ とする。

(a) $1 \leq j_l \leq n$ (ただし $l = 1, 2, \ldots, N$)　(b) $1 \leq j_1 < \cdots < j_N \leq n$
(c) $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_N \leq n$

(2) 系の化学ポテンシャルを μ とするとき，大分配関数 Ξ を β, μ, ϵ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて表せ。答のみ記せ。

(3) 系の化学ポテンシャルが μ のとき, 全エネルギーは

$$E = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j f(\epsilon_j)$$

の形に書ける。$f(\epsilon)$ を β, μ, ϵ を用いて表せ。

[B] 3次元理想電子気体 (電子質量 m，粒子数 N，体積 V) を考える。

(4) 状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ。ただし電子スピンも考慮すること。答のみ記せ。

(5) フェルミエネルギー ϵ_{F} を求めよ。

(6) 絶対零度における粒子1個あたりの平均エネルギーを ϵ_{F} を用いて表せ。

[C] 白色矮星は，完全にイオン化した原子から成り，電子の作り出す圧力と原子の集団の重力がつり合って安定化していると考えることができる。以下簡単のため原子はすべて ^{4}He とし，クーロン相互作用や相対論的効果は無視できるものとする。白色矮星の質量を M，半径を R とする。

(7) 白色矮星の電子系のエネルギーを K とすると，その M, R 依存性は $K = aM^{\gamma}R^{\nu}$ (ただし a は定数) の形に表せる。無次元定数 γ, ν を求めよ。ただし白色矮星中の電子系は，半径 R の球内にある理想電子気体でありかつ十分低温にあるとみなせるとして，(6) の結果を用いてよい。

(8) 重力による白色矮星全体の位置エネルギーを U とすると，その M, R 依存性は $U = -bGM^{\delta}R^{\kappa}$ (ただし b は無次元定数) の形に表せる。無次元定数 δ, κ を求めよ。答のみ記せ。

(9) 上記の条件の下で，$R \propto M^{\alpha}$ のように振舞うことが知られている。M 一定の条件の下で，白色矮星の半径は，(7) の K と (8) の U の和が R に関して最小となる条件から決められるとして，無次元定数 α を求めよ。答のみ記せ。

(10) 白色矮星の温度は数万度に達している。それにもかかわらず (7),(9) において電子は十分低温にあるとみなしてよい理由を述べよ。白色矮星の典型的な密度 1.4×10^6 g/cm^3，陽子質量 1.7×10^{-27} kg，および下記のうち必要なものを用いてよい。

$k_B = 1.4 \times 10^{-23}$ J/K,
$c = 3.0 \times 10^8$ m/s,
$G = 6.7 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2,
$\hbar = 1.1 \times 10^{-34}$ J s,
$m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg,
$\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}$ F/m.

$\boxed{3}$

[A]　真空に関する以下の問いに答えよ。

(1)　1atm(1 気圧) は何 Pa(パスカル) か。

(2)　下の文章は標準的な大きさの真空装置内部を，標準的な真空ポンプを用いて大気圧から真空にする手順を説明したものである。空欄 (ア)，(ウ)，(エ) にあてはまる最も適切な語句を答え，(イ)，(オ)，(カ) は選択肢の中から最も適切なものを選択せよ。

まず，$\boxed{(ア)}$ ポンプを用いて大気圧から $\boxed{(イ)\ 10^{9},\ 10^{6},\ 10^{3},\ 10^{0},\ 10^{-3},\ 10^{-6}}$ Pa 程度まで粗引きをする。この際の真空度は $\boxed{(ウ)}$ を用いて計測する。

その後，$\boxed{(エ)}$ ポンプを用いた排気に切り替え，しばらく経つと装置の真空度は $\boxed{(オ)\ 10^{9},\ 10^{6},\ 10^{3},\ 10^{0},\ 10^{-3},\ 10^{-6},\ 10^{-9}}$ Pa 程度の $\boxed{\text{(カ) 低真空，中真空，高真空，超高真空，極高真空}}$ に到達する。

(3)　$\boxed{(ウ)}$ の表示が 10^{-1} Pa 程度になったら別の機器を用いて真空度を測定する。この機器の名称と測定原理を説明せよ。

[B]　次に真空を用いた応用実験として，金属の仕事関数を求める。仕事関数とは，金属中の電子を外部に放出するのに必要な最低のエネルギーである。エネルギーの与え方として光を照射する光電子放出 (光電効果) が有名であるが，ここでは金属を高温に加熱し，その熱エネルギーによって電子が放出される熱電子放出を考え，電子の量を電流として計測することで仕事関数を求める。放出された電子と装置内部の残留ガスとの衝突・散乱を低減させるために真空中でこの実験を行う必要がある。

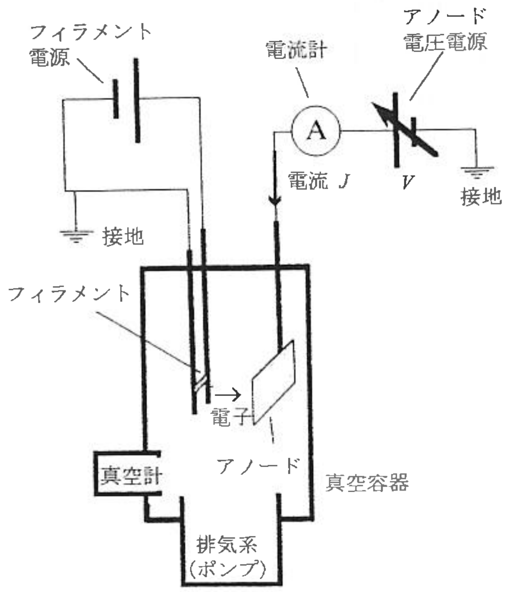


図 1

具体的には図1のように，金属であるフィラメントに電流を流すとジュール熱が発生することで熱電子が放出される。フィラメントと平行に置かれたアノードという別の金属板でその電子を全て捕獲できたし，そのとき電流計に流れる電流を J_0 とする。J_0 とフィラメントの仕事関数 W_0 とその温度 T の間には，

$$J_0 = AT^2 \exp\left(-\frac{W_0}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \tag{1}$$

という関係がある。ただし，$A = \dfrac{4\pi emk_{\mathrm{B}}^2 S}{h^3}$ で，$e(>0)$ は電気素量，m は電子の質量，k_{B} はボルツマン定数，h はプランク定数であり，S はフィラメントの表面積である。

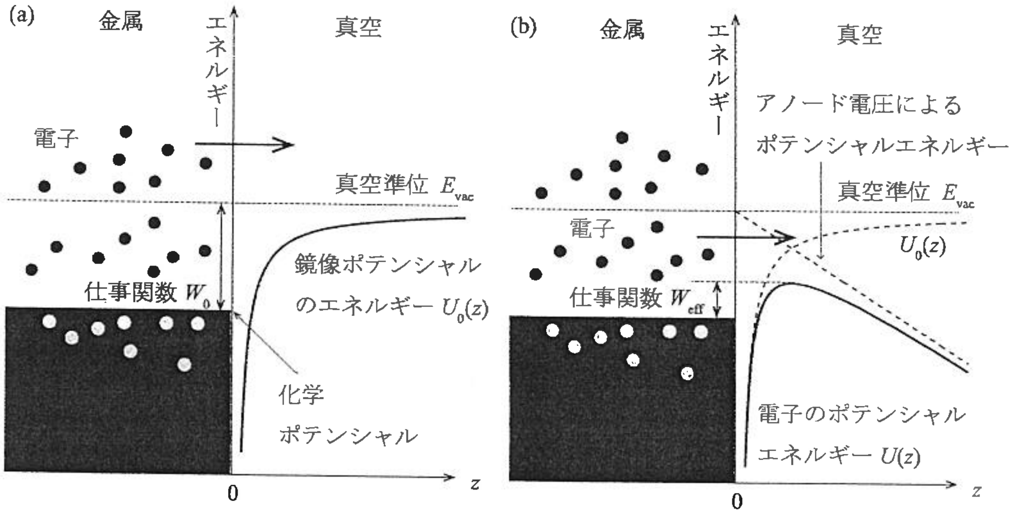


図2

図2(a) はフィラメント (金属) から熱電子が放出される様子を示したものである。鏡像ポテンシャルに束縛された電子が熱エネルギーを得ることで真空中へ放出される。フィラメントの表面を原点として z 軸正の向きをアノード方向にとると，鏡像ポテンシャルのエネルギーは $U_0(z) = -k\dfrac{e^2}{z} + E_{\mathrm{vac}}$ で与えられる (k は定数)。W_0 は $U_0(z)$ の $z \to \infty$ での値である真空準位 (E_{vac}) とフィラメントの化学ポテンシャルのエネルギー差に相当する。

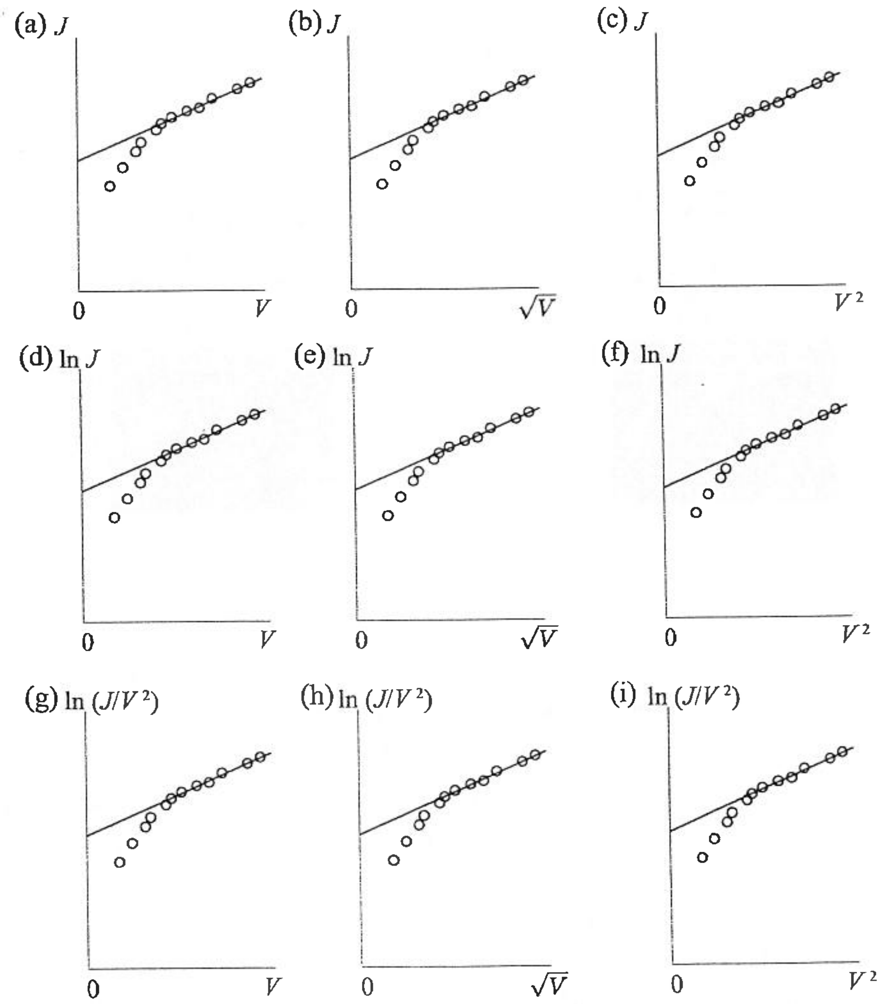
ただ，実際には熱電子は四方八方に飛び出すので有限の大きさのアノードで J_0 を正確に測定することは不可能である。そこで，アノードにフィラメントに対して正の電圧 V を印加し，電場によって熱電子を集める。このとき金属表面近傍の電子のポテンシャルエネルギー $U(z)$ は，$U_0(z)$ にアノード電圧によるポテンシャルエネルギーを加えたものとなる。アノード電圧印加による電場が一様であるとすると，$U(z)$ は図2(b) の実線のようなものになり，実効的に仕事関数は $U(z)$ の最大値と化学ポテンシャルの差である W_{eff} に減少する。これに伴い，(1) 式の関係により，電流計で計測される電流 J も変化する。

以下の問いに答えよ。ただし，フィラメントとアノードの距離が d で一定であるとし，エネルギーの原点を真空準位とする ($E_{\mathrm{vac}} = 0$)。

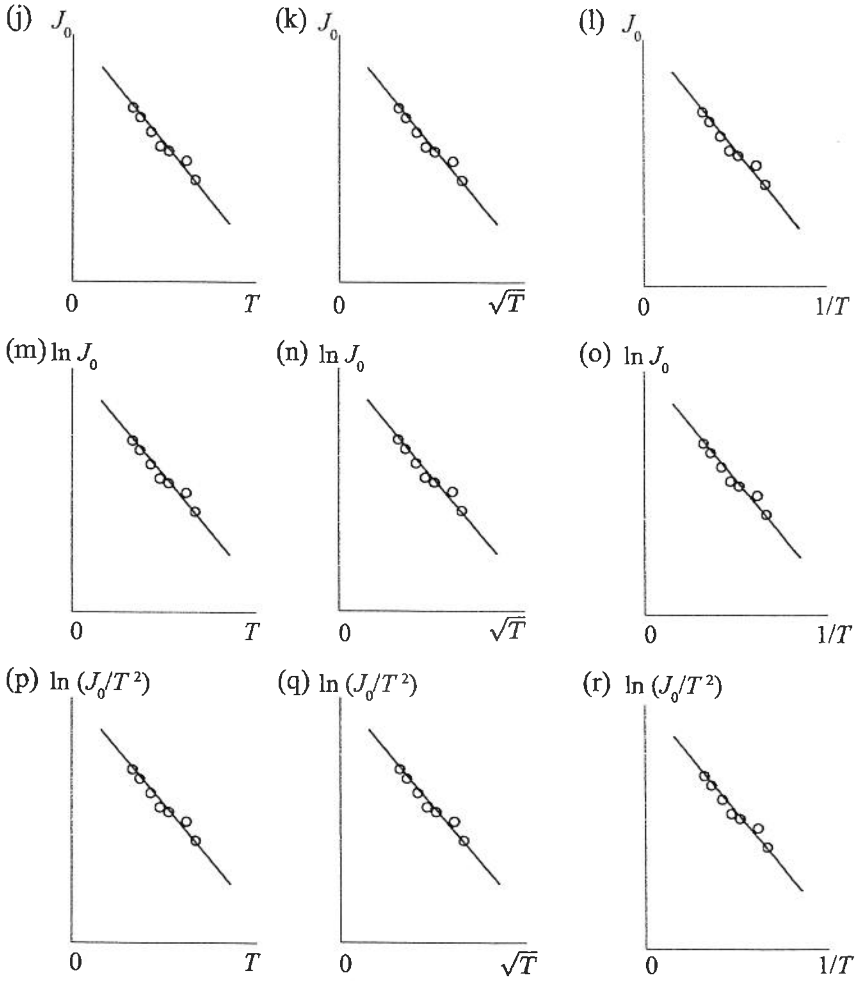
(4) 電圧 V が印加された場合の電子のポテンシャルエネルギー $U(z)$ を求めよ。

(5) 電圧 V が印加された場合の実効的な仕事関数 W_{eff} を求めよ。

(6) 実験としてはまず T を固定し，V を変化させて J を測定する。得られた V[V](ボルト) と J[A](アンペア) のデータを，縦軸と横軸を適切に選んでプロットしたところ，V が大きい領域では直線関係が得られた (V が小さいときは放出された熱電子が全部集められないので直線からずれる)。このときのグラフとして最も適切なものを次の (a)-(i) の中から選び，その理由を記せ。



(7) (6) のグラフの V が大きい領域をフィットした直線を $V=0$ に外挿したものが，温度 T での J_0 と考えることができる。T を変化させて測定を行い，(6) のグラフをプロットすることで J_0 を導出した。得られたデータから縦軸と横軸を適切に選んで J_0[A](アンペア) と T[K](ケルビン) の関係をプロットしたところ，直線関係が得られた。このときのグラフとして最も適切なものを次の (j)-(r) の中から選び，その理由を記せ。



(8) (7) で選んだグラフを直線でフィッティングすることで仕事関数 W_0 を導出できる。直線の傾きが -5.00×10^4 だったとき，W_0 の値を eV 単位で有効数字 2 桁で求めよ。必要であれば $e=1.60\times10^{-19}$ C, $m=9.11\times10^{-31}$ kg, $k_B=8.62\times10^{-5}$ eV/K, $h=4.14\times10^{-15}$ eV s, $S=100$ mm^2 であることを用いてよい。