筆答専門試験科目（午前）　　　　　　２０２３　大修

物理学系　　　　　　　　　　　　　時間　９：３０－１１：３０

物 理 学（午 前）

受 験 番 号

注意事項

１．　次ページ以降の３題すべてに解答せよ。

２．　答案用紙は３枚である。

３．　解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

４．　各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

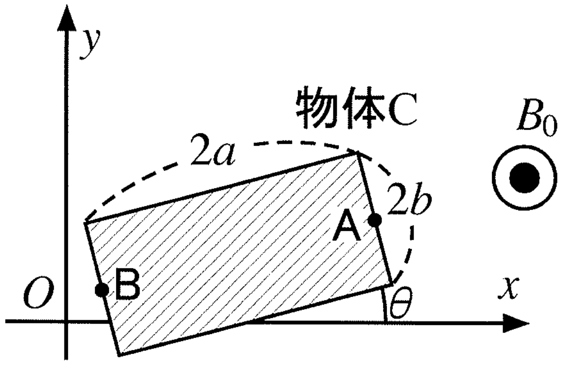
５．　答案用紙は，解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

６．　問題冊子および計算用紙の第１ページに受験番号を記入せよ。

７．　問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1

図のように, 2 辺の長さが $2a$, $2b$ で厚さが無視できる均質な長方形の物体 C（質量 m）において, 長さ $2b$ の辺の中点 A, B に質量の無視できる点電荷 Q_{A}, Q_{B} が与えられており, 紙面を裏から表に貫く向きに磁束密度の大きさが B_0 の一様な磁場がかけられている。物体 C は常に xy 平面内にあるものとし, 物体 C の重心の速度を (v_x, v_y) とする。本設問では, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と x 軸の正の向きがなす角 θ (図の反時計回りを正とする) を物体 C の向きとよび, θ の時間微分を $\dot{\theta}$ で表す。重力および空気抵抗は無視できるものとし, 電場はかけられていないものとする。物体 C は絶縁体と考えてよい。



[A] まず, $Q_A = q, Q_B = -q(q > 0)$ の場合を考える。はじめ, 物体Cは $\theta = 0$ の向きで静止していたとする。ある時刻に物体Cに瞬間的な力積を与えたところ, 物体Cの重心はある方向に運動を行い, 物体Cの向きは $\theta = 0$ 付近で微小な単振動を行った。物体Cの向きが単振動を行うことに伴うローレンツ力を無視すれば, 重心の運動は速さ v_0 の等速度運動とみなせる。次の各問に答えよ。

(1) 物体Cの重心を通り, xy 平面に垂直な軸の周りの慣性モーメント I を a, b, m, q の中から必要なものを用いて表せ。

(2) 物体Cの向きが $\theta = 0$ 付近で単振動を行うためには, 物体Cの重心はどの向きに運動していればよいか。次の選択肢の中から選んで記号で答えよ。

（あ）x 軸正の向き　（い）x 軸負の向き
（う）y 軸正の向き　（え）y 軸負の向き

(3) 物体Cの向きが示す振動の角振動数 ω を a, b, I, q, B_0, v_0 の中から必要なものを用いて表せ。必要なら $|\theta| \ll 1$ の場合に成り立つ近似式 $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ を用いてよい。

[B]　次に, $Q_A \neq Q_B, Q_A + Q_B > 0$ の場合に, 物体 C がどのように重心運動や向きの運動（回転運動）を行うのかを考える。次の各問に答えよ。

(4)　点 A の速度の x 成分, y 成分を, $v_x, v_y, \theta, \dot{\theta}, a, b$ の中から必要なものを用いて, それぞれ表せ。

(5)　物体 C の重心の運動方程式, および重心を中心とする回転の運動方程式は, それぞれ次のように表される。

重心の運動方程式：

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = \boxed{\quad （ア） \quad} \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = \boxed{\quad （イ） \quad} \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

回転の運動方程式：

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \boxed{\quad （ウ） \quad}$$

空欄（ア）～（ウ）に当てはまる数式を $a, b, Q_\mathrm{A}, Q_\mathrm{B}, v_x, v_y, B_0, \theta, \dot{\theta}$ の中から必要なものを用いて, それぞれ答えよ。必要ならベクトルに関する次の公式を用いてよい。

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

(6) 時刻 $t=0$ において, 物体 C の重心に, ある初速度を与え, 物体 C の向きに, ある初角速度 ω_0 を与えた。このとき, 物体 C は一定の角速度 $\dot{\theta}=\omega_0(\omega_0>0)$ で回転し続ける運動を行った。時刻 $t=0$ において, 物体 C の重心は原点にあり, $\theta=0$ であるとする。(5) の（ウ）は 0 となることから, 物体 C の重心の速度を, ある時刻の関数 $A(t)$ を用いて

$$\begin{cases} v_x = \quad A(t)\sin\omega_0 t \\ v_y = \ -A(t)\cos\omega_0 t \end{cases} \tag{ii}$$

と表すことができる。重心の運動方程式 (i) において,

$$S = \frac{B_0(Q_{\mathrm{A}}+Q_{\mathrm{B}})}{m}$$
$$T = \frac{B_0 a\omega_0(Q_{\mathrm{A}}-Q_{\mathrm{B}})}{m}$$

とおき, (ii) 式を用いて v_x, v_y を消去すると, 次の式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{dA(t)}{dt}\sin\omega_0 t = \boxed{\quad（エ）\quad} \\ -\dfrac{dA(t)}{dt}\cos\omega_0 t = \boxed{\quad（オ）\quad} \end{cases} \tag{iii}$$

空欄（エ）、（オ）に当てはまる数式を, $S, T, m, \omega_0, t, A(t)$ の中から必要なものを用いて, それぞれ答えよ。

(7) （6）において, 物体 C の重心に与えるべき初速度の x 成分, y 成分を, $a, b, m, \omega_0, Q_{\mathrm{A}}, Q_{\mathrm{B}}, B_0$ の中から必要なものを用いて, それぞれ答えよ。

2

図 1 のように，$z<0$ の領域を真空とし，その誘電率を ε_0，透磁率を μ_0 とする．$z>0$ の領域には，誘電率 ε，透磁率 μ，電気伝導度 σ の空間的に一様な導体を置く．角振動数 ω の電磁波が平面波として，導体表面（$z=0$）に対して垂直に入射する場合を考える．ただし，電磁波の電場 $\boldsymbol{E}$ は x 方向を，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は y 方向を向き，それらは空間座標 z と時刻 t のみの関数であり，導体中の電磁波の角振動数は真空中と同じものとする．また，真空中の電荷密度と電流密度，および導体中の電荷密度はゼロであるとする．このとき，誘電率 ε，透磁率 μ の媒質中のマックスウェル方程式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{j}+\mu\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

である．ここで，$\boldsymbol{j}$ は電流密度を表す．以下の問いに答よ．ただし，導体中の透磁率 μ は真空中の透磁率 μ_0 と同じとし，解答には μ を用いること．

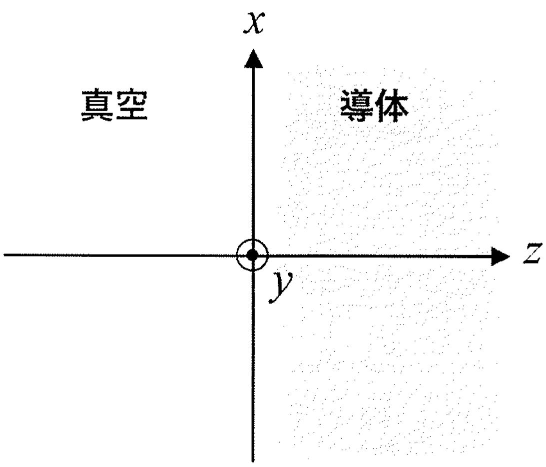


図 1

(1) 一般に，マックスウェル方程式から

$$-\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\boxed{\text{（ア）}}+\frac{\partial}{\partial t}\boxed{\text{（イ）}}\qquad\text{(i)}$$

という関係式を導くことができる．ここで，$\boxed{\text{（ア）}}$ は電磁波の運ぶエネルギーの流れの密度を表し，$\boxed{\text{（イ）}}$ は電磁波のエネルギー密度を表す．（ア），（イ）に当てはまる数式を，μ, ε, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の内，必要なものを用いて表せ．なお，必要であれば，任意のベクトル場 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ について成り立つベクトル演算の公式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{X})-\boldsymbol{X}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{Y})$ を用いてよい．

境界面（$z=0$）での電磁波の振る舞いについて考えよう．真空中の電磁波が導体に入射した際，境界面において電磁波の一部が反射される．そのため，$z<0$ の領域には入射波と反射波が，$z>0$ の領域には透過波が存在することになる．電場の複素表示において，入射する電場の振幅を E_0，反射および透過した電場の振幅をそれぞれ E_{R}，E_{T} とすると，その x 成分は

$$E_x(z,t)=\begin{cases} E_0\exp\bigl[i(k_0z-\omega t)\bigr]+E_{\mathrm{R}}\exp\bigl[-i(k_0z+\omega t)\bigr] & (z<0) \\ E_{\mathrm{T}}\exp\bigl[i(kz-\omega t)\bigr] & (z>0) \end{cases} \tag{ii}$$

と表される．ここで，k_0 は真空中の電磁波の波数を表し，導体内部の電磁波の波数 k は一般に複素数となり得る．複素表示では，実部が物理的な場を表す．

(2) 真空中・導体中それぞれの領域における磁束密度の y 成分 $B_y(z,t)$ を複素表示で求めよ．

(3) 真空中の電場の x 成分と磁束密度の y 成分をそれぞれ E_x^{vac}，B_y^{vac}，導体中の電場の x 成分と磁束密度の y 成分をそれぞれ E_x^{cond}，B_y^{cond} と表すことにする．次の等式の内，境界面上において電場と磁束密度が満たす関係式として正しいものをすべて選び，記号で答えよ．

(A) $\varepsilon_0E_x^{\mathrm{vac}}=\varepsilon E_x^{\mathrm{cond}}$　(B) $\varepsilon E_x^{\mathrm{vac}}=\varepsilon_0E_x^{\mathrm{cond}}$　(C) $E_x^{\mathrm{vac}}=E_x^{\mathrm{cond}}$

(D) $k_0B_y^{\mathrm{vac}}=kB_y^{\mathrm{cond}}$　(E) $kB_y^{\mathrm{vac}}=k_0B_y^{\mathrm{cond}}$　(F) $B_y^{\mathrm{vac}}=B_y^{\mathrm{cond}}$

(4) 問 (3) の境界条件を用い，境界面上での電磁波の反射率 $R=\left|E_{\mathrm{R}}/E_0\right|^2$ を求め，k と k_0 を用いて表せ．

次に，導体内部に入り込んだ電磁波の振る舞いについて考えよう．

(5) 電気伝導度 σ の導体内部には $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$ の電流密度が発生する．このとき，マックスウェル方程式から磁束密度を消去することにより，導体内部で電場の x 成分が満たす方程式

$$\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}=\boxed{\quad（ウ）\quad} \tag{iii}$$

を導くことができる．（ウ）に当てはまる数式を，μ，ε，σ，E_x を用いて表せ．ただし，（ウ）には微分演算子を含めてもよい．なお，必要であれば，任意のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ について成り立つベクトル演算の公式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{X})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{X})-\nabla^2\boldsymbol{X}$ を用いてよい．

(6) 以下の文章を完成させよ．ただし，（エ），（オ）には当てはまる数式を，μ，ε，σ，ω の内必要なものを用いて表し，答案用紙に記せ．（カ）には最も適切と考えられるグラフを図 2 の中から一つ選び，記号で答えよ．（キ），（ク）には，下記の単語群から最も適切なものをそれぞれ一つずつ選び，記号で答えよ．

導体中の電磁波の波数 k の実部を k_r，虚部を k_i と表すことにしよう．(iii) 式に (ii) 式で与えられる透過波の表式を代入し，導体は大きい電気伝導度をもつものと仮定すると $(\sigma/\omega\varepsilon \gg 1)$，物理的な解として $k_r =$ （エ），$k_i =$ （オ） が得られる．この結果より，導体内部に電磁波が入射した際の電場の x 成分の振る舞いは，$\lambda = 2\pi/k_r$ とすると，ある時刻においてグラフ （カ） のようになることがわかる．導体内部におけるこのような電磁波の振る舞いは，(i) 式の （キ） がゼロにならないことにより，導体内部に （ク） が発生したことによるものと考えられる．

（あ）左辺　（い）右辺第 1 項　（う）右辺第 2 項　（え）不純物　（お）渦電流
（か）反射波　（き）衝撃波　（く）プラズマ　（け）ジュール熱　（こ）磁化

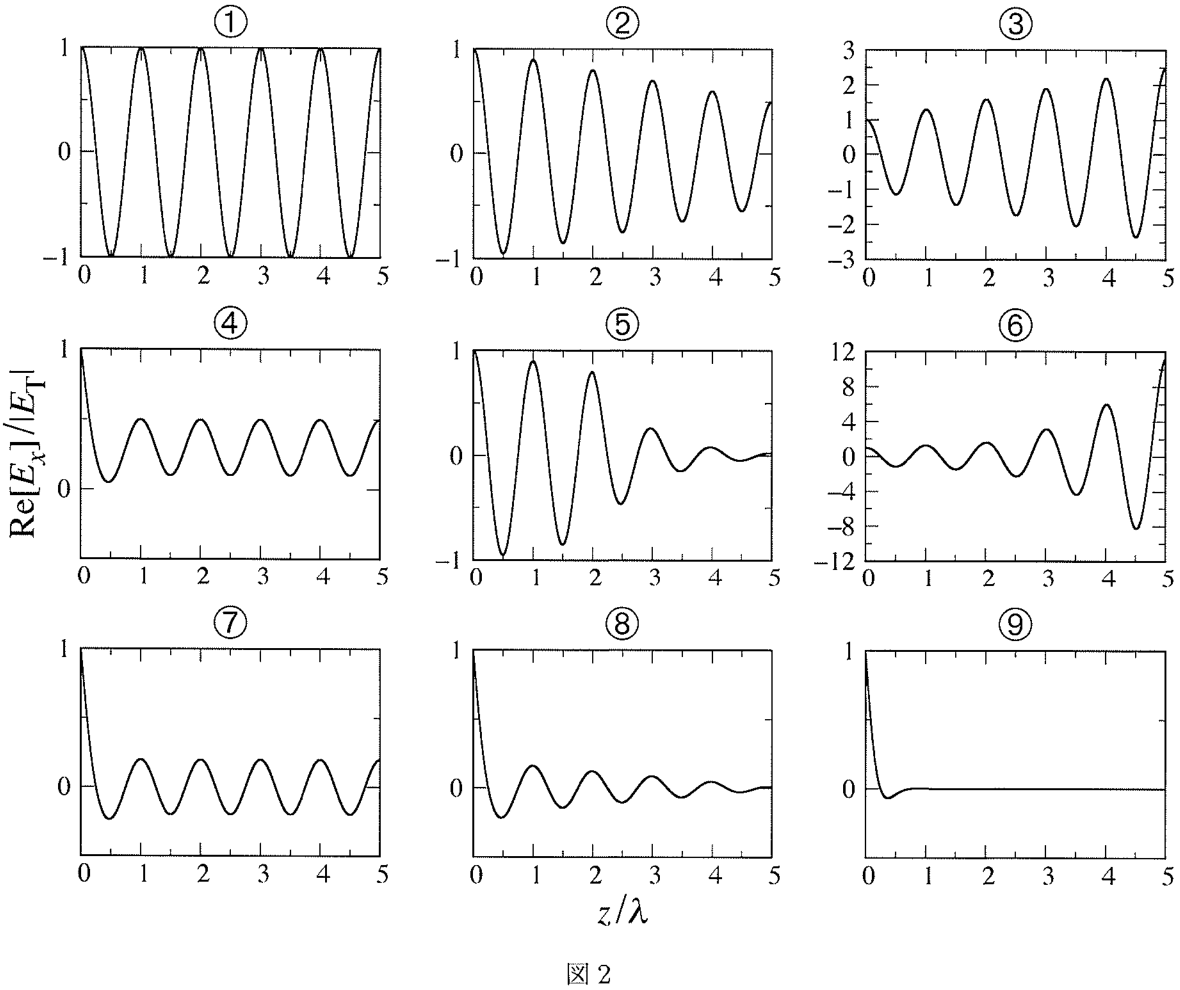


図 2

3

[A] (1) x, y を実数とするとき、複素数 $x+iy$ に対して定義される複素関数は x, y の二変数関数 $f(x,y)$ とみなせる。次の中から正則である複素関数を全て選び記号で答えよ。

(あ) $f(x,y) = ix$　　(い) $f(x,y) = x^2 + y^2$
(う) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy$　　(え) $f(x,y) = ix - y$

(2) 複素数 z を変数とする複素関数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n z^n = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \cdots$$

の収束半径を求めよ。また、この関数の解析接続を $g(z)$ とおくとき、$g(z)$ の $z=9$ での値 $g(9)$ を求めよ。

(3) 定積分

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i x}}{x^3+1+i\epsilon}dx, \qquad \epsilon: \text{正の無限小量}$$

の値を求めよ。

[B] (1) $n \times n$ の正方行列 A, B について正しい式を全て選んで記号で答えよ。

(あ) $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$　　(い) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$
(う) $\det(A^{-1}) = -\det(A)$　　(え) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A) \times \mathrm{tr}(B)$
(お) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$　　(か) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

(2) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

は、直交行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

のように対角化できる。行列 P および λ_1, λ_2 を求めよ。ただし $\lambda_1 < \lambda_2$ である。

(3) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の４つの固有値をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ とおく。$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ および $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ を求めよ。

[C] ベクトル場

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = \frac{xz}{r}\boldsymbol{e}_x + \frac{yz}{r}\boldsymbol{e}_y + \frac{r^2 + z^2}{r}\boldsymbol{e}_z, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

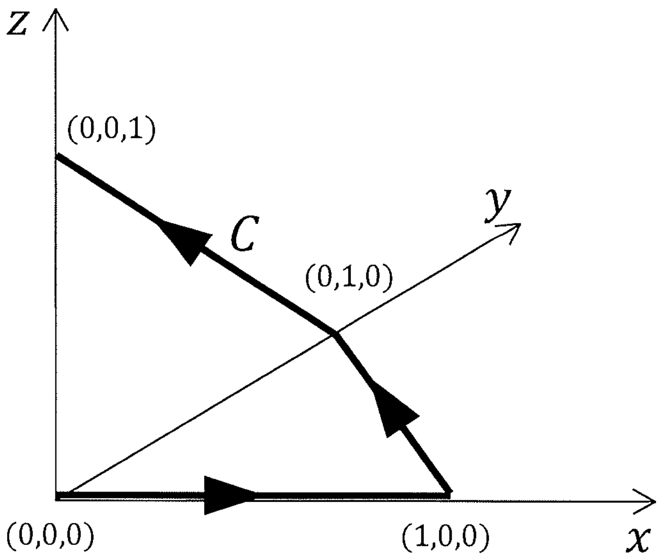
を考える。ただし、(x, y, z) は直交座標系における点を表し、$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の基本ベクトルである。

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ と回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ。

(2) 図のように４点 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ をこの順に線分で結んだ経路を C とする。経路 C に沿った線積分

$$I = \int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}$$

の値を求めよ。



図

筆答専門試験科目（午後）　　　　　　　　　２０２３　大修

物理学系　　　　　　　　　　　　時間　１３：３０－１５：３０

物 理 学（午 後）

受　験　番　号

注意事項

1．　次ページ以降の３題すべてに解答せよ。

2．　答案用紙は３枚である。

3．　解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。

4．　各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。

5．　答案用紙は，解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。

6．　問題冊子および計算用紙の第１ページに受験番号を記入せよ。

7．　問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1

磁束密度の大きさが B の空間的に一様な静磁場が z 軸正の向きにかかっているとき、質量 m、正電荷 q を持つ量子力学的粒子の xy 平面上の運動を考える。xy 平面上の位置 (x, y) におけるベクトルポテンシャルを、

$$\boldsymbol{A} = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0\right),$$

とすると、粒子の運動を記述するハミルトニアンは、定数 $\omega = \dfrac{qB}{2m}$ を用いて、

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) - \omega(xp_y - yp_x),$$

と書ける。ここで、p_x と p_y はそれぞれ x 方向と y 方向の運動量を表す。プランク定数を h として $\hbar = h/(2\pi)$ と定義する。

以下で定義される演算子を導入し、ハミルトニアン H で記述される系を考察する。

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\hbar}}\left[\sqrt{m\omega}(x + iy) + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}(p_x + ip_y)\right],$$
$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{\hbar}}\left[\sqrt{m\omega}(x - iy) + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}(p_x - ip_y)\right].$$

(参考)：一般に、$[a, a^\dagger] = 1$ の交換関係を満たす演算子 $a^\dagger$ と a で $n = a^\dagger a$ を定義すると、n の固有値は負でない整数である。演算子 n の固有値 ℓ を持つ規格化された固有状態 $|\ell\rangle$ は、$a|0\rangle = 0$ を満たす状態 $|0\rangle$ を用いて、$|\ell\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\ell!}}(a^\dagger)^\ell|0\rangle$ と書ける。

(1) 交換関係 $[\alpha, \alpha^\dagger]$ と $[\alpha, \beta]$ を求めよ。

(2) x、y、p_x、p_y、m、$\hbar$、ω のうち必要なものを用いて、$\alpha^\dagger\alpha$ を表せ。

$\alpha^\dagger\alpha$ の固有値が n_α であり、$\beta^\dagger\beta$ の固有値が n_β である $\alpha^\dagger\alpha$ と $\beta^\dagger\beta$ の同時固有状態を $|n_\alpha, n_\beta\rangle$ と書くことにする。

(3) 状態 $|n_\alpha, n_\beta\rangle$ のエネルギー E_{n_α,n_β} を求めよ。答えは、m、$\hbar$、ω、n_α、n_β のうち必要なものを用いて表せ。

(4) 状態 $|0,0\rangle$ の波動関数は、

$$\psi_{00}(x,y) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}(x^2+y^2)\right],$$

で与えられる。状態 $|0,1\rangle$ の波動関数 $\psi_{01}(x,y)$ を求めよ。

(5) 状態 $|0,1\rangle$ は角運動量の z 成分 L_z の固有状態である。その固有値を求めよ。

以下の問において、必要なら

$$x^2+y^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\left(\alpha^\dagger\alpha + \beta^\dagger\beta + \alpha\beta + \alpha^\dagger\beta^\dagger + 1\right),$$

を用いよ。

(6) (3) の結果より、異なる n_β を持つ状態のエネルギーは縮退をする。エネルギーが最も低い状態のうち、平均二乗半径 $\langle x^2+y^2\rangle$ が R^2 より小さい状態の数 ν を求めよ。答えは、m、$\hbar$、B、q、R のうち必要なものを用いて表せ。ただし、$R \gg \sqrt{\dfrac{2\hbar}{qB}}$ とし、ν を連続量と見なして良い。

(7) 状態 $|0,0\rangle$ に

$$V = k(x^2+y^2),$$

で与えられる摂動がかかっている。k は正の定数である。この摂動による 1 次のエネルギー変化 $\Delta E^{(1)}$ と 2 次のエネルギー変化 $\Delta E^{(2)}$ を求めよ。答えは、m、$\hbar$、ω、k、q のうち必要なものを用いて表せ。

$\boxed{2}$ 磁性体のモデルとして, N 個のスピン σ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ からなる系を考える. N は偶数とし, 各スピンは磁気モーメントを単位として $\sigma_i = \pm 1$ の 2 つの値をとるものとする. (4) 以外では系は温度 T の熱平衡状態にあるものとして, 以下の問いに答えよ. また, ボルツマン定数を k とし, $\beta = 1/(kT)$ を解答に用いてよい.

[A] 磁場 H を用いて, 系のハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = -H \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$$

で与えられるとする.

(1) エネルギーの期待値を求めよ.

(2) $H > 0$ のとき, 熱容量 C の温度依存性を表す最も適当なグラフを図 1 の①〜⑥から選び, 番号で答えよ.

(3) ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ.

(4) 断熱環境において, 磁場 H, 温度 T の始状態から磁場を準静的に変化させて, 終状態における磁場を $H' = H/2$ とした. このとき, 終状態における温度 T' を求めよ.

[B] スピンが 2 個ずつ結合した場合を考える. 結合定数 J と磁場 H を用いて, 系のハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = J \sum_{i=1}^{N/2} \sigma_{2i-1}\sigma_{2i} - H \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$$

で与えられるとする. ここで $J > 0$ とし, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sigma_i$ の期待値を磁化と呼ぶ.

(5) $H < -J$, $-J < H < J$, $J < H$ の 3 つの場合について, 絶対零度における磁化をそれぞれ求めよ.

(6) 温度が十分に大きいとき, 磁化は温度に反比例する. このときの磁化を求めよ.

(7) $H < -J$, $-J < H < J$, $J < H$ の 3 つの場合について, 絶対零度におけるエントロピーをそれぞれ求めよ.

(8) 温度が無限大となる極限におけるエントロピーを求めよ.

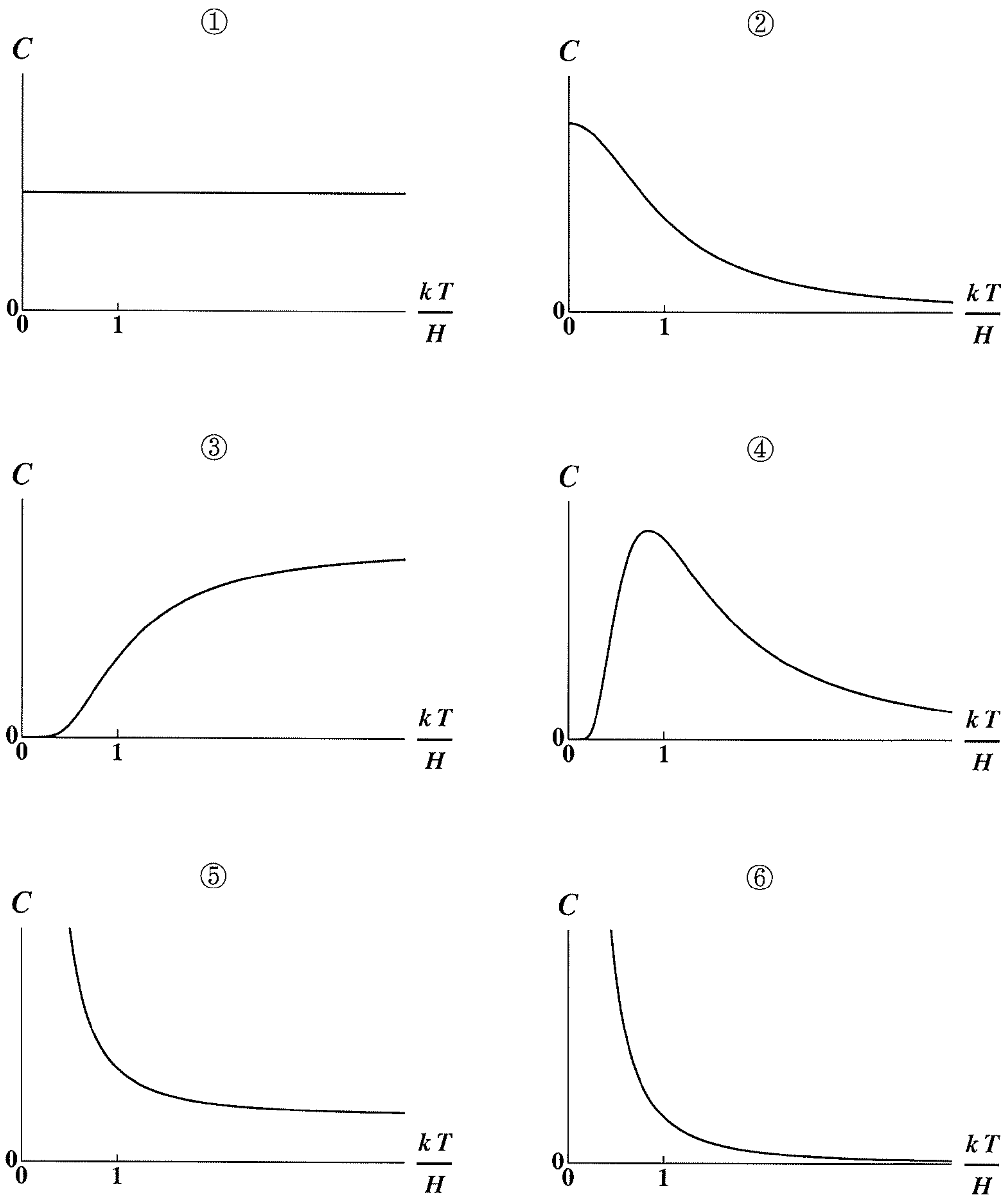


図１

3

放射線計測に関する問いに答えよ。必要であれば以下の定数を用いて良い。

定数	値
電気素量	1.60×10^{-19} C
光速	3.00×10^{8} m s^{-1}
自然対数の底 e	2.72
$\log_e 10$	2.30

荷電粒子	静止質量エネルギー
電子	5.11×10^{-1} MeV
ミューオン	1.06×10^{2} MeV
陽子	9.38×10^{2} MeV
アルファ粒子	3.73×10^{3} MeV

[A] 次の文章はガンマ線と物質の相互作用について説明したものである。

図1は、プラスチックシンチレータの、ガンマ線に対する質量吸収係数のエネルギー依存性を示したものである。ガンマ線が物質を通過する際に起きる吸収または散乱の過程は3種類あり、1つ目は入射したガンマ線光子が原子に束縛された軌道電子と相互作用して、そのエネルギー E_γ を全て軌道電子に与えてガンマ線光子は消滅する $\boxed{\text{(A)}}$ である。

2つ目は、入射光子のエネルギーが軌道電子の束縛エネルギーに対して十分高い場合に、ガンマ線光子と自由電子の衝突と見なすことができる $\boxed{\text{(B)}}$ である。このとき、散乱光子のエネルギー E'_γ は 入射光子のエネルギー E_γ、および入射光子と散乱光子の進行方向のなす角 θ によって以下のように表される。

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \xi\,(1 - \cos\theta)}$$

ここで、$\xi = E_\gamma/(m_e c^2)$, ただし、m_e は電子の静止質量, c は光速である。 この相互作用により光子の失ったエネルギーは反跳電子に与えられる。

3つ目は、ガンマ線のエネルギーがおよそ1 MeV 以上の場合にのみ生じる $\boxed{\text{(C)}}$ である。

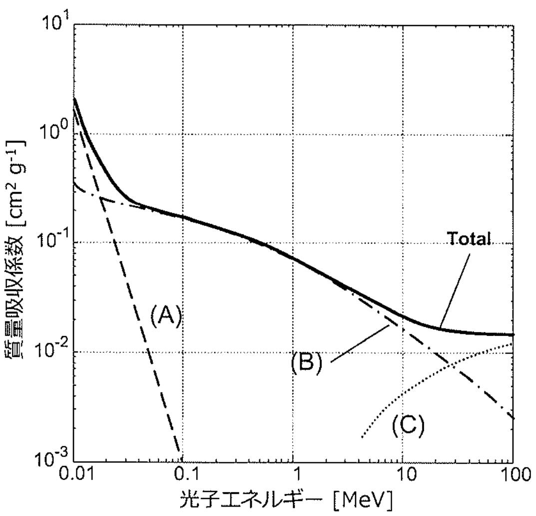


図1

(1) 空欄 (A), (B), (C) にあてはまる最も適切な語句を答えよ。

(2) 厚さ 10 cm のプラスチックシンチレータに垂直に 0.50 MeV のガンマ線を照射したときに、ガンマ線がプラスチックと相互作用し吸収または散乱される割合を有効数字 1 桁で計算せよ。ただし、プラスチックシンチレータの質量密度は $1.0\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$ とする。

前述のガンマ線と物質の相互作用を考慮して、実際の放射線計測についての設問に答えよ。図 2 は、プラスチックシンチレータと光電子増倍管 (PMT) をライトガイドを介して接合した放射線検出器の概略図である。PMT の出力は特性インピーダンス 50 Ω の同軸ケーブルでオシロスコープに接続され、オシロスコープにおける終端抵抗も 50Ω に設定した。図 3 は ^{137}Cs からのガンマ線 (662 keV) を照射したときのオシロスコープの画面を示す。

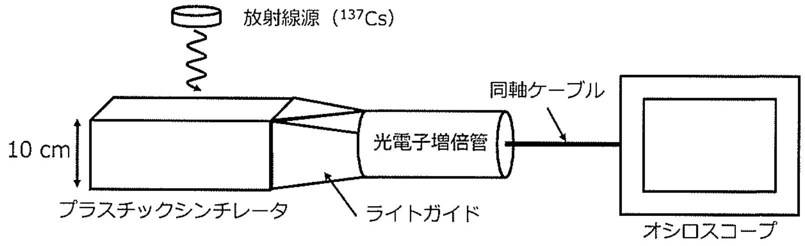


図 2

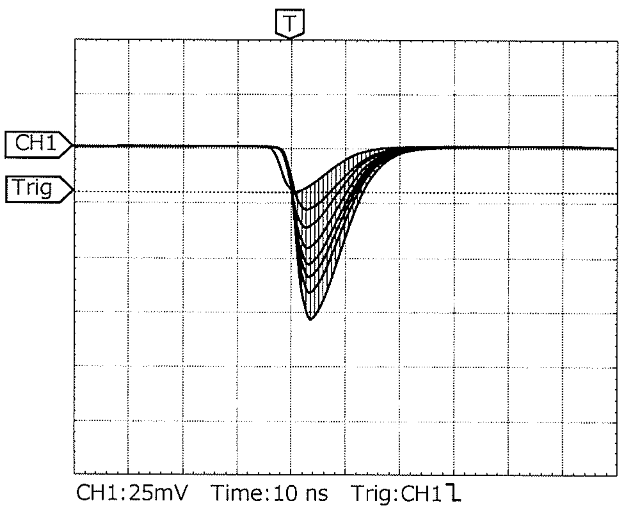


図 3

(3) 図 3 で観察された一連のイベントのうち、最も振幅の大きな（ピーク電圧の低い）パルスが観測されたときに、1 個のガンマ線光子がプラスチックシンチレータに付与したエネルギーを有効数字 2 桁で求めよ。

(4) プラスチックシンチレータの発光光量は 1.0×10^4 photon MeV^{-1}, PMT の量子効率は 10 %, PMT の信号増幅率は 1.0×10^6 倍であった。シンチレータで生じた光子のうち PMT に入射する光子の割合を有効数字 1 桁で求めよ。ただし、パルス波形は底辺の長さが 20 ns の三角形と仮定して良い。

[B] 次の文章は荷電粒子と物質の相互作用について説明したものである。

図 4 は、プラスチックシンチレータの、電子より重い荷電粒子に対する阻止能 (単位長さ単位密度あたりの付与エネルギー $\rho^{-1}dE/dx$ [MeV cm^2 g^{-1}]) を入射粒子の運動エネルギー $(\gamma-1)m_{\rm i}c^2$ の関数として表したものである。(ただし、$m_{\rm i}$ は入射粒子の質量、γ は入射粒子の速さ v を用いて $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ で与えられる Lorentz 因子である。)

物質中に入射した荷電粒子は、主に原子に束縛された軌道電子と相互作用することで運動エネルギーを失う。ほとんどの場合、荷電粒子は軌道電子の近傍をかすめて飛び去り、その際に $\boxed{\text{(D)}}$ 力 F を軌道電子に及ぼす。荷電粒子の速度が非相対論的な場合、荷電粒子が軌道電子に与える力積 $I = \int F dt$ は F の大きさと、荷電粒子が軌道電子の近傍を通過する時間に比例するから、I は荷電粒子の電荷量に比例し、荷電粒子の速さ v に反比例する。この過程で軌道電子が得る運動エネルギーは I, m_e を用いて $\boxed{\text{(E)}}$ と表すことができるから、阻止能は荷電粒子の運動エネルギーが増大するに従って減少する。荷電粒子がより速くなると、相対論的な効果により軌道電子に与える力積は増大し、$v > 0.96c$ になると阻止能は増大に転じる。

(5) 空欄 (D), (E) にあてはまる最も適した語句，数式をそれぞれ答えよ。

(6) 図 4 は陽子とミューオンの阻止能を表している。(X), (Y) のうち、ミューオンの阻止能を表したものはどちらか、理由とともに答えよ。
また、アルファ粒子の阻止能はおよそ 10 GeV 付近で最小となる。このときの阻止能を有効数字 1 桁で求めよ。

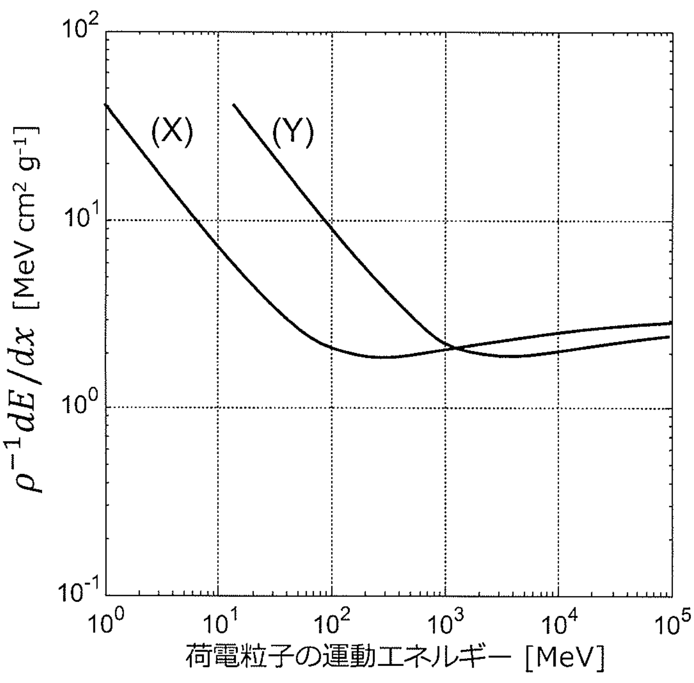


図 4

[C] 計測実験のデータ処理に関する以下の問いに答えよ。

一般に N 個の粒子があり、その粒子数が dt 後に $dN = -N dt/\tau$ 個だけ変化するとき、τ を寿命と呼ぶ。以下では、上層大気で生成され地上に飛来するミューオンが、検出器に入射してから崩壊するまでの時間差 Δt を計測することで、ミューオンの寿命を推定する。

表 1 は時間幅 $1\mu s$ ごとに崩壊したミューオンの数 n をまとめたものである。また、図 5 は n を Δt の関数として片対数グラフにプロットしたものである。

表 1

Δt (μs)	**範囲**(μs)	n	$\log_{10} n$
1.0	0.5~1.5	60	1.78
2.0	1.5~2.5	35	1.54
3.0	2.5~3.5	20	1.30
4.0	3.5~4.5	10	1.00
5.0	4.5~5.5	8	0.90

データ x の平均を $\bar{x}$ と表す.

$\overline{\Delta t} = 3.00$

$\overline{\Delta t^2} = 11.0$

$\overline{\log_{10} n} = 1.30$

$\overline{(\log_{10} n)^2} = 1.81$

$\overline{\Delta t \cdot \log_{10} n} = 3.44$

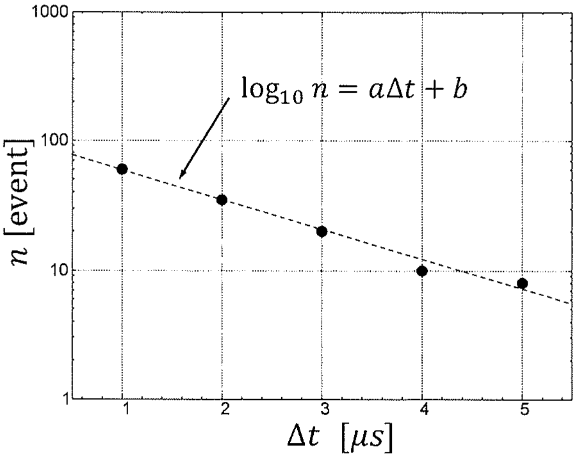


図 5

(7) 図 5 のように、計測データは片対数グラフ上で破線で示した直線に乗ることが分かった。回帰直線が $\log_{10} n = a\Delta t + b$ であると仮定したとき、この傾き a を最小二乗法を用いて有効数字 2 桁で求めよ。ここで、表 1 に与えられている計測値の平均値を用いて良い。

(8) τ を a を用いて表せ。また、実際に値を代入して τ を有効数字 2 桁で求めよ。