

筆答専門試験科目（午前）

2024 大修

物理学系

時間 9:30 - 11:30

物理 学 (午 前)

受 駿 番 号

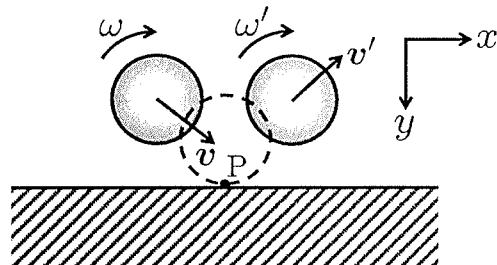
注意事項

1. 次ページ以降の3題すべてに解答せよ。
2. 答案用紙は3枚である。
3. 解答は1題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。
4. 各答案用紙には必ず受駿番号を記入せよ。
5. 答案用紙は、解答を記入していないものも含めてすべて提出せよ。
6. 問題冊子および計算用紙の第1ページに受駿番号を記入せよ。
7. 問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1

図に示すように、半径 a 、質量 M の一様な剛体球が、紙面に垂直な軸を中心として自転しながら、水平な床と滑らずに弾性衝突する運動について考える。ただし、空気抵抗は無視できるものとする。座標軸を図のようにとり、剛体球の自転の正の向きを図の矢印のようにとる。

剛体球の衝突直前の重心の速度を $v = (v_x, v_y)$ および自転の角速度を ω 、衝突直後の重心の速度を $v' = (v'_x, v'_y)$ および自転の角速度を ω' とする。剛体球が床と衝突するとき、剛体球上のある点で床と接触する。この剛体球上の点を P とする。



- (1) この球の中心を通る軸の周りの慣性モーメントが $I = \frac{2}{5}Ma^2$ と表されることを示せ。
- (2) この剛体球は、床と衝突するとき、点 P において垂直抗力とは別に床からの摩擦力を水平方向に受ける。この床からの摩擦力による力積を J とする。 x 方向の運動量と角運動量のそれぞれについて、 J を用いて衝突前後の関係を示せ。ただし、慣性モーメントには I を用いてよい。
- (3) 衝突直後には $v'_y = -v_y$ となる。 (2) で導いた関係に加えて運動の全エネルギーが保存されることに着目し、 v'_x および ω' を、それぞれ v_x, ω, a を用いて表せ。
- (4) 衝突直前および直後における点 P の x 方向の速度をそれぞれ u_x および u'_x とする、 $u'_x = -u_x$ となっていることを示せ。

次に、ある高さにおいて同じ剛体球に重心の速度 $v_0 = (v_x, 0)$ と自転の角速度 ω を与える。その後、剛体球は重力を受けて水平な床と弾性衝突し跳ね返る運動を繰り返す。この運動について考える。

- (5) まず1回の衝突による v_x と ω の変化を考える。 v_x と ω が床との衝突時にのみ変化することに着目し、衝突前の $v_x, a\omega$ および衝突後の $v'_x, a\omega'$ をそれぞれまとめて、

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} v_x \\ a\omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} v'_x \\ a\omega' \end{pmatrix}$$

のようにベクトル \mathbf{p}, \mathbf{p}' を用いて表す。さらに、 2×2 の行列 S を用いて、1回の衝突による変化を $\mathbf{p}' = S\mathbf{p}$ と表す。行列 S および逆行列 S^{-1} を求めよ。

- (6) 行列 S^n ($n = 1, 2, \dots$) を考えることで、 n 回衝突後の x 方向の速度 $v_x^{(n)}$ と角速度 $\omega^{(n)}$ を求めよ。
- (7) $v_0 = (0, 0), \omega (> 0)$ を剛体球に与えた場合について、 $v_x^{(n)}$ と $\omega^{(n)}$ を求めよ。また、この剛体球が繰り返し跳ね返る運動における重心の軌跡の概形を図示せよ。
- (8) S の2つの固有値 λ を求めよ。それぞれの固有値について \mathbf{p} が S の固有ベクトルとなる v_x と $\omega (> 0)$ の関係を求め、この剛体球が繰り返し跳ね返る運動における重心の軌跡の概形を図示せよ。

2

電気回路において、電気信号は一般に時間とともに大きさが変化する波として伝わる。直流からギガヘルツ帯までの電気信号を伝送する際によく用いられるものの1つとして、円柱状の内部導体と円筒状の外部導体を同軸に配置し、その間を誘電体で充填した同軸ケーブルが挙げられる。以下では、図1に示したような内部導体の直径が $2a$ 、外部導体の直径が $2b$ であるような、同軸ケーブルの性質を議論する。簡単のために、内部導体と外部導体の間には誘電体は充填されておらず真空であるとし、外部導体の厚さは無視する。真空の誘電率を ϵ_0 、真空の透磁率を μ_0 とする。

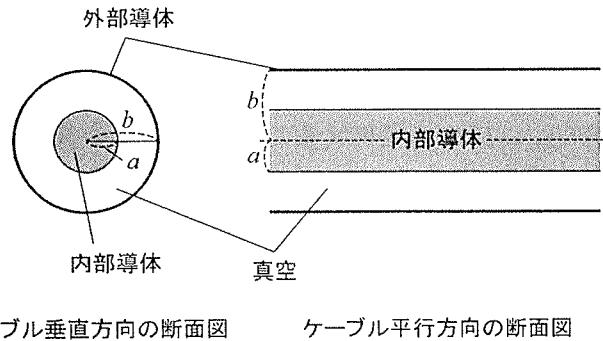


図1

[A] 同軸ケーブルは円柱状の内部導体と円筒状の外部導体の間でコンデンサーを形成していると見ることができる。なお、以下の問では簡単のために同軸ケーブルの両端の効果は無視する。

- (1) 円柱状の内部導体に単位長さあたり $\lambda (> 0)$ の電荷を、外部導体に単位長さあたり $-\lambda$ の電荷を与えたとする。発生する電場 E の様子が分かるように、電気力線を答案用紙の図に描け。また、中心軸からの距離 r における電場 E の大きさ $E(r)$ を $0 < r < a$, $a < r < b$, $b < r$ についてそれぞれ求めよ。
- (2) 同軸ケーブルの単位長さあたりに蓄えられる電場のエネルギーと、単位長さあたりの電気容量 C_0 をそれぞれ求めよ。

[B] 内部導体と外部導体に、互いに逆向きかつ等しい大きさの直流電流 I が流れている状況を考える。なお、以下の問では簡単のために同軸ケーブルの両端の効果は無視し、内部導体、および外部導体において電流は一様に流れているものとする。

- (3) 答案用紙に図示された向きに電流 I が流れた場合を考える。発生する磁束密度 B の様子が分かるように、磁力線を答案用紙の図に描け。また、中心軸からの距離 r における磁束密度 B の大きさ $B(r)$ を $0 < r < a$, $a < r < b$, $b < r$ についてそれぞれ求めよ。
- (4) 同軸ケーブルの単位長さあたりに蓄えられる磁場のエネルギーと、同軸ケーブルの単位長さあたりの自己インダクタンス L_0 をそれぞれ求めよ。
- (5) (4) で求めた単位長さあたりの自己インダクタンスは直流電流を印加した際のものである。これに対し、内部導体として銅のような高い電気伝導率を持つ導体を用い、かつ、たとえば a が数 mm の同軸ケーブルに、数メガヘルツ程度の交流電流を流した際の実効的な自己インダクタンスの値は、直流電流印加時における自己インダクタンスの値とは異なる。その理由を簡潔に説明し、直流電流印加時の自己インダクタンスと比べ、上述の交流電流印加時における自己インダクタンスは大きくなるか小さくなるかを答えよ。答案用紙に記載されている“大きくなる”“小さくなる”のどちらか一方を丸で囲むこと。

[C] 同軸ケーブルを用いて交流信号を伝送することを考える。同軸ケーブルの電気的特性は、図 2 に示したような、 Δx を微小長さとして、自己インダクタンス $L_0\Delta x$ 、電気容量 $C_0\Delta x$ からなる、無限に長い回路網で近似される。ここで L_0 、 C_0 はそれぞれ単位長さあたりの自己インダクタンスと電気容量である。簡単のために導体の抵抗は無視している。図 2 において、 x 方向にのびる上側の線を信号線とよぶ。測定に用いる際には、交流電源は回路網の左側の端子に接続する。以下の問では Δx は十分小さいものとし、 Δx の 2 次の微小量は無視できるものとする。

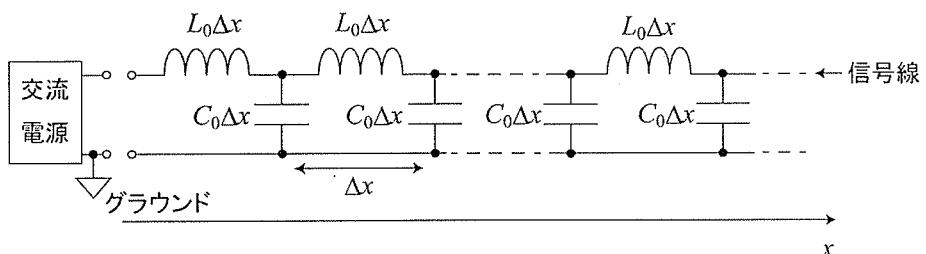


図 2

- (6) この無限に長い回路網のインピーダンスはある値 Z_0 に収束し（すなわち、回路網を左側に一段のばしてもインピーダンスは変わらない），その値 Z_0 を回路の特性インピーダンスとよぶ。 Z_0 を求めよ。
- (7) 同軸ケーブルを交流電源に接続した。信号線上の電位 $V(x, t)$ および電流 $I(x, t)$ を図 3 に示したように定義する。図 2 における Δx を十分細かくすることにより， $V(x, t), I(x, t)$ は位置 x ，時刻 t の滑らかな関数と考えることができ。微小長さ Δx の回路における電圧降下，電流分岐を考えると，

$$V(x, t) - V(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x = \boxed{\quad \text{(ア)} \quad}$$

$$I(x, t) - I(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial I}{\partial x} \Delta x = \boxed{\quad \text{(イ)} \quad}$$

が導かれる。この 2 つの連立方程式から，電流 I を消去すると，電位 $V(x, t)$ が満たすべき方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \boxed{\quad \text{(ウ)} \quad} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

が導かれ，波動方程式の形をしていることが分かる。空欄 (ア) (イ) (ウ) に入る数式を求めよ。

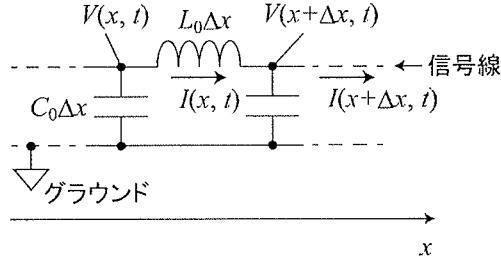


図 3

- (8) 上記の波動方程式の解の 1 つとして，たとえば $+x$ 方向に位相速度 v で進む波が挙げられる。図 1 の同軸ケーブルにおいて，内部導体を流れる交流電流がその表面のみを流れる場合，その位相速度 v を， a, b, ϵ_0, μ_0 から必要なものを用いて求めよ。
- (9) 外部導体と内部導体の間に，比誘電率 2，比透磁率 1 の物質を充填した。この同軸ケーブル中を伝わる交流電気信号の位相速度を光速 c を用いて表せ。

(このページは落丁ではありません。)

3

[A] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ。答案用紙には答のみ記入すること。

[B] 実変数 x の関数 $f(x), g(x)$ に関する微分方程式

$$x \frac{df}{dx} = -fg, \quad x \frac{dg}{dx} = g + 1 - f^2$$

を考える。ただし $f(x), g(x)$ は極限 $x \rightarrow 0$ および $x \rightarrow \infty$ において、条件

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

をみたすものとする。以下の間に答えよ。

(1) $f(x), g(x)$ の $x = 0$ のまわりのべき級数展開

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

を考える。係数 a_1 および b_1 の値を求めよ。また a_2 と b_2 の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) $f(x) = xF(x), g(x) = -1 - xG(x)$ とおく。 $F(x), G(x)$ がみたす微分方程式を示せ。答は答案用紙にあてはまる形に表すこと。

(3) $F^2 - G^2$ が x によらないことを示せ。またその値を求めよ。

(4) $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

[C] 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\cosh x} dx$$

を求めよ。ただし k は実数とする。

(このページは落丁ではありません。)

筆答専門試験科目（午後）

2024 大修

物理学系

時間 13：30 - 15：30

物理 学 (午 後)

受 験 番 号

注意事項

1. 次ページ以降の3題すべてに解答せよ。
2. 答案用紙は3枚である。
3. 解答は1題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。
4. 各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。
5. 答案用紙は、解答を記入していないものも含めてすべて提出せよ。
6. 問題冊子および計算用紙の第1ページに受験番号を記入せよ。
7. 問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

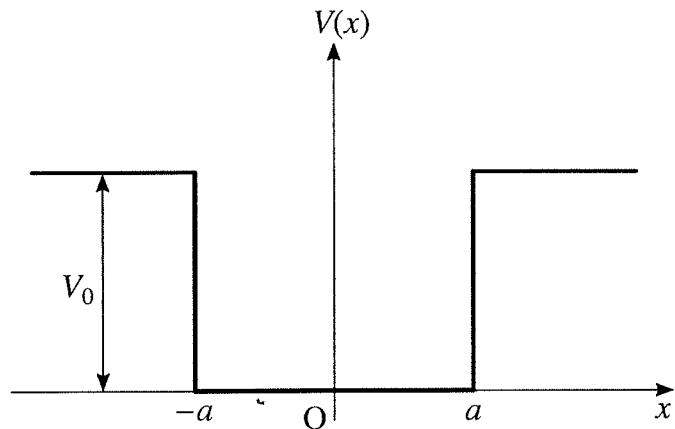
1

位置 x に対して偶対称な束縛ポテンシャル $V(x)$ [$= V(-x)$] のもとで x 軸上を運動をしている質量 m の粒子を考える。この粒子はシュレーディンガー方程式に従い、束縛状態が存在するものとする。これらの束縛状態を固有エネルギーが低い方から順に $n = 0, 1, 2, \dots$ とし、それぞれの状態の固有エネルギーを ε_n とする。ただし、縮退は無いものとする。また、以下では換算プランク定数を \hbar とする。

[A] $V(x)$ が図のような井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (-a \leq x \leq a) \\ V_0 & (x < -a, a < x) \end{cases}$$

の場合の束縛状態について、以下の間に答えよ ($V_0 > 0, a > 0$)。



- (1) ポテンシャル $V(x)$ が偶関数であることを用いて、基底状態 ($n = 0$)、第一励起状態 ($n = 1$)、および第二励起状態 ($n = 2$) の波動関数の節の数と偶奇性を答えよ。答案用紙には答のみ記すこと。
- (2) 固有エネルギーが ε の束縛状態を考える。(I) $x < -a$, (II) $-a \leq x \leq a$, (III) $a < x$ の各領域におけるシュレーディンガ一方程式の解 $\psi_I(x)$, $\psi_{II}(x)$, $\psi_{III}(x)$ は実関数 $\phi_I(x)$, $\phi_{II}^{(1)}(x)$, $\phi_{II}^{(2)}(x)$, $\phi_{III}(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= A_I \phi_I(x), \\ \psi_{II}(x) &= A_{II}^{(1)} \phi_{II}^{(1)}(x) + A_{II}^{(2)} \phi_{II}^{(2)}(x), \\ \psi_{III}(x) &= A_{III} \phi_{III}(x)\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\phi_{II}^{(1)}(x)$ は奇関数、 $\phi_{II}^{(2)}(x)$ は偶関数であり、 A_I , $A_{II}^{(1)}$, $A_{II}^{(2)}$, A_{III} は定数である。束縛状態であることを用いて、 $\phi_I(x)$, $\phi_{II}^{(1)}(x)$, $\phi_{II}^{(2)}(x)$, $\phi_{III}(x)$ を求めよ。ここで、 $\phi_I(x)$, $\phi_{III}(x)$ については、それぞれ $\phi_I(-a) = 1$, $\phi_{III}(a) = 1$ となるように規格化し、 $\phi_{II}^{(1)}(x)$, $\phi_{II}^{(2)}(x)$ については $|\phi_{II}^{(1)}(x)|$, $|\phi_{II}^{(2)}(x)|$ の最大値が 1 となるように規格化せよ。答案用紙には答のみ記すこと。

- (3) $\psi_I(x)$ と $\psi_{II}(x)$ の $x = -a$ における接続条件、および $\psi_{II}(x)$ と $\psi_{III}(x)$ の $x = a$ における接続条件から、束縛状態が 3 つ以上存在するための条件を求めよ。
- (4) $V_0 \rightarrow \infty$ 極限における ε_n および $\psi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。 $\psi_n(x)$ は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

となるように規格化せよ。

- [B] 以下では、3つ以上の束縛状態が存在する $V(x)$ を考え、基底状態付近のエネルギーをもつ粒子の振る舞いに注目する。 $n \geq 3$ の状態はエネルギーが高く、これらの状態への励起は無視できるとする。この系を実効的に $n = 0, 1, 2$ の3状態よりなる3準位系とみなそう。状態 $\psi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2$) の固有エネルギーを ε_n とし、 $\varepsilon_0 = 0$ とする。また、以下では

$$\psi_0(x) \rightarrow |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_1(x) \rightarrow |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2(x) \rightarrow |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように基底をとった行列表示を用いる。さらに、この系の位置演算子 \hat{x} が

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p_0}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{p_0}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{p_0}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{p_0}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられている。ここで、 p_0 は定数である。

- (5) 状態 $|\psi(t)\rangle$ が時刻 $t = 0$ において

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

にあるとする。時刻 $t > 0$ における \hat{x} の期待値 $\langle \hat{x} \rangle(t)$ を計算せよ。答は ε_1 , ε_2 , \hbar , t , p_0 のうち必要なものを用いて表せ。

この3準位系に $-F\hat{x}$ なる摂動を加えたときの基底状態を考える (F は定数)。

- (6) この基底状態における \hat{x} の期待値 $\langle \hat{x} \rangle$ を F で展開したとき、 F の1次の項を求めよ。答は ε_1 , ε_2 , F , \hbar , p_0 のうち必要なものを用いて表せ。
- (7) この基底状態のエネルギーを F で展開したとき、 F の2次の項を求めよ。答は ε_1 , ε_2 , F , \hbar , p_0 のうち必要なものを用いて表せ。

(このページは落丁ではありません。)

2

以下の間に答えよ。 k_B はボルツマン定数であり、 \hbar は換算プランク定数である。

- [A] 固体表面における单原子分子理想気体の吸着について考える。固体表面の吸着可能な場所は M 個あり、各場所には分子は 1 個のみ吸着できる。吸着した分子のエネルギーを $-\epsilon$ とする。ただし、 $\epsilon > 0$ である。理想気体の分子数は N 個 ($N \gg M$) とし、この系の絶対温度を T とする。

まず、固体表面に $n (< M)$ 個の分子が吸着した部分平衡状態を考えてみる。ここで、 n, M, N は大きな数であり、 $M - n$ も大きな数とする。必要であれば、大きな数 N に対するスターリングの公式

$$\log N! \sim N \log N - N$$

を用いてもよい。

- (1) 吸着分子の配置にかかるエントロピー S_s を求めよ。答のみ記せ。
- (2) 吸着した分子にかかる自由エネルギー F_s を求めよ。答のみ記せ。ここで、 S_s を用いてもよい。
- (3) 分子数 N 個の单原子分子理想気体の自由エネルギー F_g は以下の式で与えられることが知られている。

$$F_g = -Nk_B T \left\{ \frac{3}{2} \log \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right) + \log \left(\frac{V}{N} \right) + 1 \right\}$$

ここで、 m は分子の質量、 V は気体の体積である。固体表面に n 個の分子が吸着した部分平衡状態における系全体の自由エネルギー F を求めよ。答のみ記せ。ここで、 F_s を用いてもよい。

次に、熱平衡状態における理想気体の表面吸着について考える。

- (4) 热平衡状態における被覆率 $\theta = \langle n \rangle / M$ を求めよ。ここで、 $\langle n \rangle$ は吸着分子数 n の热平衡状態における平均値である。ただし、 $n, M \ll N$ に注意せよ。

- [B] N 個の原子からなる固体を考える。原子間には相互作用はなく、この固体は独立な原子からなるものとみなすことができる。1 個の原子のとりうる状態は 3 つあり、そのエネルギーは、 $0, -\epsilon, -\epsilon$ で与えられる。3 つの状態のうち、2 つの状態は縮退している。ただし、 $\epsilon > 0$ である。この系の絶対温度を T とするとき、以下の間に答えよ。
- (5) この系の分配関数 Z を求めよ。
 - (6) この系のエントロピー $S(T)$ を求め、その概形を、低温極限、高温極限の値とともに図示せよ。
 - (7) この系の比熱 $C(T)$ を求め、その概形を、低温極限、高温極限の値とともに図示せよ。

3

[A] 図1のように、アルコールを染み込ませたスポンジを容器に入れてドライアイスで冷やすと、放射線が入射したときに、電離したイオンを核とした液滴の軌跡を上方の透明な蓋を通して観察できる（霧箱実験）。この実験に関して述べた以下の文章の空欄(1)に入る適切な用語、空欄(2)に入る数字を答え、空欄(3)に入る数値を有効数字1桁で求めよ。また、空欄(4)に入る最も適切な語句を選択肢から選び記号で答えよ。

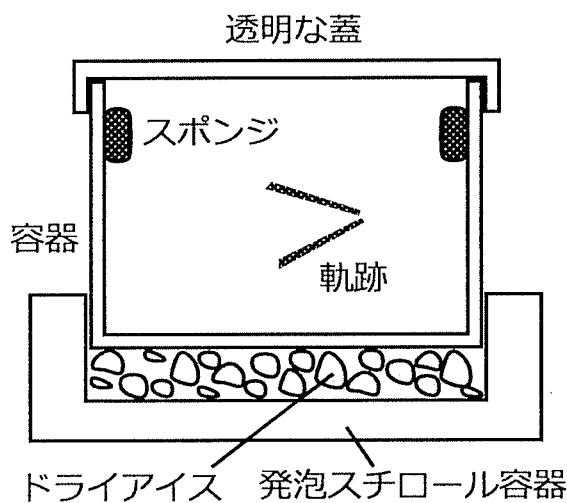


図1

屋外で霧箱をしばらく観察していると、長さ数cmの太い線を観察することができた。これは放射線の一種である (1) 線の軌跡であり、その正体はヘリウム原子核である。例えば、ラドン 222 (222 は質量数を表す) がポロニウム (2) に崩壊するときに生じ、ヘリウム原子核の静止質量エネルギーを 3.7 GeV とすると、発生した放射線のエネルギーが 6.66 MeV であったとき、ヘリウム原子核の速さは光速の (3) パーセント程度である。

稀に、図1のように2本の (1) 線の軌跡を観察できる。これはラドン 220 が崩壊するときに見られる現象で、(4) ために2本の軌跡が観察される。

選択肢

- | | |
|---------------------|------------------|
| (あ) 崩壊後の原子核の半減期が短い | (い) 電子が対生成する |
| (う) ヘリウムがコンプトン散乱される | (え) 電子が対消滅する |
| (お) ヘリウムがプロトンに崩壊する | (か) ニュートリノが2個生じる |

[B] 外気圧が 960 hPa の日に水深 40 m の淡水湖の底における圧力を測定した。
1 atm = 760 mmHg という関係と、水銀の比重が 13.6 であることから、このときの圧力を計算し、有効数字 2 桁で答えよ。単位は atm で答えること。必要ならば、重力加速度を 9.8 m/s^2 として計算に用いてよい。

[C] 低周波のゲインが 20 倍の反転アンプで、100 Hz 程度 (90 ~ 110 Hz) にカットオフ周波数を持ち、それより高い周波数では周波数と共にゲインが減衰するローパスフィルターを作りたい。使用可能なオペアンプの個数は 1 個で、抵抗とコンデンサーは下記の中から選ぶこととする。回路全体で、抵抗は 3 個まで（同じ抵抗値の抵抗を複数個用いてもよい）、コンデンサーは 1 個しか使用できないものとする。

- 抵抗 : 1 kΩ, 10 kΩ, 100 kΩ
- コンデンサー : 0.1 μF, 0.15 μF, 1 μF, 1.5 μF

答案用紙の破線内に必要な素子の電気記号を描き、配線してローパスフィルターの回路図を完成させよ。抵抗値やコンデンサーの容量を図中に明記すること。正入力端子はグラウンドに接続する。

[D] フォトダイオード (PD) は光のエネルギーを電気エネルギーに変換する素子である。PDにおいて光子 1 個あたりから取り出せる電子の数を量子効率と呼ぶ。PD の仕様書には、取り出せる光电流と入射光パワーの比 (受光感度) が記載されている。図 2 に示す受光感度を持つ PD の、波長 660 nm の光に対する量子効率を、有効数字 2 桁で求めよ。電気素量を $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、プランク定数を $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 、光速を $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ とする。

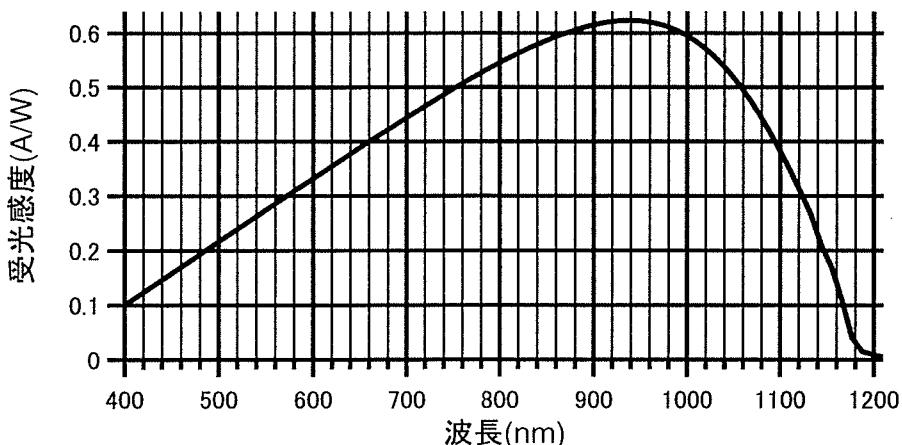


図 2

[E] 以下に示すのは、半導体の電気抵抗に関する実験結果をまとめたレポートの一部である。実験装置の記述は省略してある。このレポートには改善すべき点がある。実験結果を示すグラフの表し方を変えることで、測定結果と理論曲線の整合性をより分かりやすく示すことができるのだが、どのように変えればよいか、簡潔に説明せよ。

―― 実験レポート（一部）――

3. 実験原理

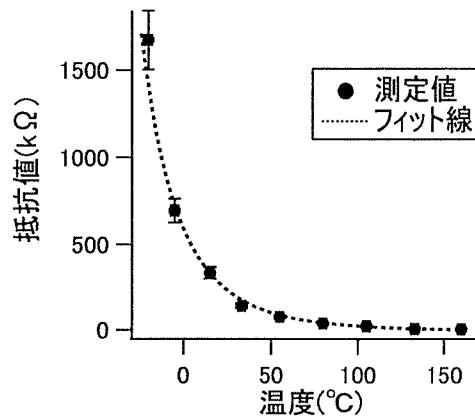
半導体の抵抗の温度変化は、絶対温度を T として、半導体ごとに決まる定数 B を用いて $R(T) = R(\infty) \exp\left[\frac{B}{T}\right]$ と表すことができる。

4. 実験装置

(中略)

5. 実験結果

右図に抵抗の測定値を示す。
 $B = 3000 \text{ K}$, $R(\infty) = 10 \Omega$ としてフィットした理論曲線と測定結果がよく合っている。



図：抵抗値の温度依存性

(このページは落丁ではありません。)