筆答専門試験科目（午前）　　３１　大修

（数学）　　時間　９：３０～１１：３０

システム制御系

注意事項

１．問題１から問題４まで，すべてについて解答しなさい。

２．解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。

３．解答は問題ごとに別々の答案用紙に記入しなさい。
　　各問題の解答は裏面も使用できるが，１枚に収めること。

４．各答案用紙には，必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。
　　問題番号は，試験科目名欄に書きなさい。
　　氏名を書いてはいけません。

問題１

問１

(1) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x-1}-x\right)$$

(2) 次の複素積分を求めよ。ただし，積分路 C は，複素平面上の $|z|=5$ で表される円周上を反時計回りに一周する経路とする。

$$\oint_C \frac{7z-1}{z^2-z-6}dz$$

問２　３次元空間に直交座標系 xyz をとる。$x^2+y^2\le r^2$ かつ $y^2+z^2\le r^2$ を満たす領域を立体 D とする。ただし，$r>0$ とする。

(1) 立体 D を平面 $y=y_0$ で切った断面の面積を求めよ。ただし，$-r\le y_0\le r$ とする。

(2) 立体 D の体積を求めよ。

(3) 立体 D の表面積を求めよ。

（問題１終わり）

問題２

問１　ベクトル$(a,\ b,\ c)$が，３つのベクトル$(1,\ 0,\ 2)$，$(-1,\ 1,\ -1)$，$(3,\ -2,\ 4)$ の線形結合で表されるための $a,\ b,\ c$ についての必要十分条件を求めよ。

問２　行列 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & x+2 \\ 1 & x-4 & 5 \\ x+5 & -8 & 8 \end{bmatrix}$ の行列式を求め，行列式が 0 となる x をすべて求めよ。

問３　行列 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ が対角化可能かどうか判定し，その理由を述べよ。

問４　変数 x, y に関する二次形式 $q(x,y)=3x^2+2xy+3y^2$ を，標準形 $q(x',y')=ax'^2+by'^2$（$a,\ b$ は定数）に変換する座標変換を一つ求めよ。

（問題２終わり）

問題３

問１　次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(t) = e^{-t}\sin t$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ。

(2) ラプラス変換を用いて次の常微分方程式の $t \geq 0$ における解 $y(t)$ を求めよ。ただし，$y(0) = 0$，$\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 1$ とする．

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

問２　$-\dfrac{1}{2} \leq t \leq \dfrac{1}{2}$ の範囲で，$f(t) = t^2$ で表される周期 1 の周期関数を，次式のようにフーリエ級数展開するとき，フーリエ係数 a_k，b_k を求めよ。

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2\pi kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2\pi kt$$

問３　なめらかな関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[f(t)]$ が

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

で求められるとき，次式が成り立つことを示せ。ただし，$i = \sqrt{-1}$ であり，$t = \pm\infty$ のとき $f(t) \to 0$ であるとする。

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = i\omega \mathcal{F}\left[f(t)\right]$$

（問題３　終わり）

問題４

２つの独立変数 $x,\ t$ の関数 $u(x,t)$ が，以下の偏微分方程式，境界条件，初期条件を満たすとする。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u \qquad \left(0\le x\le 1,\ 0\le t<\infty\right)$$

境界条件：$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(1,t)=0 \end{cases} \qquad \left(0\le t<\infty\right)$

初期条件：$u(x,0)=\sin(\pi x) \qquad \left(0\le x\le 1\right)$

以下の問いに答えよ。

問１　$u(x,t)$ を関数 $w(x,t)$ を用いて，$u(x,t)=e^{-t}w(x,t)$ と表す。関数 $w(x,t)$ が満たす偏微分方程式，境界条件，初期条件を求めよ。

問２　問１で得られた $w(x,t)$ に関する偏微分方程式を $w(x,t)=X(x)T(t)$ とおき，変数分離法により解け。ここで，$X(x)$，$T(t)$ はそれぞれ $x,\ t$ の関数である。

問３　$u(x,t)$ を求めよ。

（問題４終わり）