筆答専門試験科目（午前）
システム制御系（数学）

2020 大修

時間 ９：３０～１１：３０

注意事項

1．問題１から問題４まで，すべてについて解答せよ。
2．解答始めの合図があるまで問題冊子を開かないこと。
3．解答は問題ごとに別々の答案用紙に記入せよ。
各問題の解答は裏面も使用できるが，１枚に収めること。
4．各答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入せよ。
各答案用紙の試験科目名欄に「システム制御系（数学）」と記入せよ。
各解答用紙の解答欄左上に，その答案用紙で解答する問題番号（「問題１」など）を記載せよ。
解答用紙には氏名を書かないこと。

（このページは落丁ではありません．問題は次ページ以降に記載されています．）

問題１

問１

(1)　次の x, y についての関数 z の全微分 dz を求めよ。ただし $x \neq 0$ とする。

$$z = 2\log\sqrt{x^2 + y^2} \ - \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

(2)　次の複素変数 z についての複素積分を求めよ。ただし積分路 C は，複素平面上の $|z| = 1$ で表される円周上を反時計回りに一周する経路とする。

$$\oint_C \frac{\sin z \ \ \cos z}{(4z - \pi)(4z + 3\pi)} dz$$

問２　３次元直交座標系の座標(x, y, z) を変数とするベクトル場

$$\boldsymbol{V} = (2xy^2, 2x^2y - z^2 + 1, -2yz)$$

について，rot $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$であることを示し，$\boldsymbol{V}$のスカラーポテンシャル関数 ϕ を求めよ。

問３　底面の半径が r ，高さが h の一様密度の直円錐体の質量中心の位置を求めたい。底面の円の中心を原点に取り，底面上に x 軸，y 軸を取る。さらに底面に垂直に（直円錐体の軸上に）原点から直円錐体の頂点に向かって z 軸を取る。

(1)　直円錐面（底面は含まない）の方程式を求めよ。

(2)　x, y, z についての三重積分を用いて，質量中心の z 座標 z_G を求めよ。

（問題１終わり）

問題2

問1

(1) a を実数として以下の行列 A を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A が正則にならない条件を述べよ。また，この時の A の核空間（$A\boldsymbol{x} = 0$を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ のなす空間）の次元を求め，その理由を述べよ。

(2) 以下の行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える。

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

実数 $t \geq 0$ に対してベクトル $\boldsymbol{y}(t) = \exp(At)\boldsymbol{x}$ と $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t)$ を求めよ。

問2 以下の行列 A を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $B = AA^{\mathsf{T}}$ の固有値と正規化した固有ベクトルの組を全て求めよ。ここで T は転置を表す。

(2) 行列 $C = A^{\mathsf{T}}A$ の固有値と正規化した固有ベクトルの組を全て求めよ。

(3) 行列 B の固有ベクトルを適切に並べて構成した直交行列を U，行列 C の固有ベクトルを適切に並べて構成した直交行列を V とすると，行列 A を $A = UWV^{\mathsf{T}}$という形で表せる。このとき行列 W を求めよ。

（問題２終わり）

問題３

問１ 実関数 $f(t)$, $g(t)$ のラプラス変換が，それぞれ，(1)，(2)の $F(s)$, $G(s)$であるとき，$f(t)$, $g(t)$ を求めよ。

(1) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+5s+4}$

(2) $G(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+5}$

問２ フーリエ変換に関する以下の問いに答えよ。

(1) ２つの実関数$x(t), y(t)$の畳み込み積分を$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$とし，$z(t)$のフーリエ変換を$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\exp(-j2\pi ft)dt$とするとき，$Z(f) = X(f)Y(f)$と表せることを示せ。ただし，$j = \sqrt{-1}$であり，$X(f)$, $Y(f)$は，それぞれ，$x(t), y(t)$のフーリエ変換とする。

(2) $r(t) = \begin{cases} 1 & \left(|t| \leq \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{1}{2}\right) \end{cases}$

とするとき，関数$r(t)$同士を畳み込み積分した関数 $w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)r(t-\tau)d\tau$ を求め，その概形を図示せよ。

(3) $w(t)$ のフーリエ変換 $W(f)$ を求めよ。

（問題３終わり）

問題４

問１　関数$x(t)$に関する微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + f(t), \qquad x(0) = x_0, \qquad t \geq 0,$$

を考える。ただし，a, x_0は実定数，$f(t)$はtの連続な関数である。

(1)　$f(t) = 0$のとき，$x(t)$をa, x_0を用いて表せ。

(2)　$f(t) = \sin t$, $x_0 = 0$のとき，$x(t)$を求めよ。

(3)　$T > 0$, zを実定数として，

$$f(t) = e^{a(T-t)}\left(\int_0^T e^{2a\tau}d\tau\right)^{-1}(z - e^{aT}x_0)$$

のとき，$x(T)$を求めよ。

問２　関数$x(t)$に関する微分方程式の初期値問題

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = c, \qquad x(0) = x_0, \qquad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = v_0, \qquad t \geq 0$$

を考える。ただしx_0, v_0, cは実定数である。

(1)　$x_0 = 3$, $v_0 = 0$, $c = 0$のとき，$x(t)$を求めよ。

(2)　$c = 4$のとき，$\lim_{t\to\infty} x(t)$を求めよ。

（問題４終わり）