筆答専門試験科目（午前）　2021 大修
システム制御系（数学）

時間　９：３０～１１：３０

注意事項

1. 問題１から問題４まで，すべてについて解答せよ。
2. 解答始めの合図があるまで３ページ目以降を見てはならない。
3. 答案用紙はB4 あるいは A4 の白紙 4 枚で，表裏合計８ページを使用してよい。
4. 計算用紙としてB4 あるいは A4 の白紙 2 枚を使用してよい。
5. 解答は問題ごとに別々の答案用紙に記入せよ。
   答案用紙の裏面も解答に使用してよいが，１枚に収めること。
6. 解答開始の合図があったら，全ての答案用紙に，問題番号・受験番号・表／裏，
   およびページ番号（1-8）を記入せよ。なお，答案用紙に氏名は書かないこと。
7. 解答時間が終了したら監督の指示を待つこと。
8. 答案用紙を撮影する際には，十分に明るい環境で用紙の真上から歪みの生じないように
   撮影すること。
9. 提出時には８ページ（４枚，表裏）の答案用紙を使わなかった分も含め全て提出すること。

（このページは落丁ではありません。問題は次ページ以降に記載されています。）

問題１

問１

(1) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

(2) 次のx, yの関数zの全微分dzを求めよ。ただし，$x > 0$, $y > 0$ とする。

$$z = x^3 + y^3 + \log_x y$$

(3) 次の複素変数zについての複素積分を求めよ。ただし積分路Cは，複素平面上の$|z| = 2$で表される円周上を反時計回りに一周する経路とする。

$$\int_C \frac{e^z}{z(z+1)}dz$$

問２　3 次元空間に直交座標系xyzをとる。$x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ で表される球体 S と $x^2+y^2 \leq ax$ で表される円柱体 P を考える。ただし，$a > 0$とする。円柱体 P のうち，球体 S の内部にある部分の体積を求めよ。

（問題１終わり）

問題２

問１　行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^n$ に対して， $f(x) = \|Ax - b\|$ をベクトル $x \in \mathbb{R}^m$ に関して最小化することを考える。ただし， $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す。また，$f(x)$ が最小となる x を x^*と表す。

(1)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき x^*を求めよ。また，そのときの $f(x^*)$ の値を求めよ。

(2)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき x^*を求めよ。また，そのときの $f(x^*)$ の値を求めよ。

(3)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき x^*を求めよ。また，そのときの $f(x^*)$ の値を求めよ。

問２

(1)　巡回行列 $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ の３つの固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めよ。ただし，固有ベクトルの第一要素は 1 とし，第二要素と第三要素は，ある $r \geq 0$ および $\theta \in [0,2\pi)$ を用いて，極形式 $re^{i\theta}$で表すこと。なお，$i = \sqrt{-1}$ とする。

(2)　巡回行列 $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ の３つの固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めよ。ただし，(1)と同様に，固有ベクトルの第一要素は 1 とし，第二要素と第三要素は極形式 $re^{i\theta}$で表すこと。

(3)　a, b, c を定数とする。巡回行列 $A_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ の３つの固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めよ。ただし，(1)と同様に，固有ベクトルの第一要素は 1 とし，第二要素と第三要素は極形式 $re^{i\theta}$で表すこと。

（問題２終わり）

問題3

問1 2つの実関数 $f(t), g(t)$ のたたみ込み積分を $h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ とし，$h(t)$ のラプラス変換を $H(s)=\int_0^\infty e^{-st}h(t)dt$ とする。同様に $f(t), g(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $F(s), G(s)$とする。以下の問いに答えよ。

（1）$H(s)=F(s)G(s)$ と表わせることを示せ。

（2）$f(t)$，$g(t)$ を以下の関数とするとき，$F(s)$，$G(s)$ を導出せよ。

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases}e^{-t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

（3）（2）の $f(t)$，$g(t)$ について，$h(t)$ を求めよ。

問2 確率変数 X が指数分布に従い，その確率密度関数 $f(x)$ が以下の式で表されるとする。ここで，$\lambda>0$とする。また，$i=\sqrt{-1}$とし，$E[\ ]$ は期待値を表す。以下の問いに答えよ。

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\, e^{-\lambda x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

（1）特性関数 $\varphi(t)=E\left[e^{iXt}\right]$ を求めよ。なお，t は実数とする。

（2）$E[X]=-i\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0}$ を求めよ。

（3）$E[X^3]$ を求めよ。

（問題3終わり）

問題４

２つの独立変数 x,t（ともに実数）の関数 $u(x,t)$ は，x に関するフーリエ変換が可能であるとする。ここで，$u(x,t)$ の x に関するフーリエ変換とその逆変換は次式で表される。ただし，$i=\sqrt{-1}$ である。

$$\mathcal{F}[u(x,t)] = U(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx \qquad (1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[U(\omega,t)] = u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega \qquad (2)$$

$u(x,t)$ が，次の偏微分方程式と初期条件を満たすとき，以下の問いに答えよ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty) \qquad (3)$$

$$\text{初期条件}：u(x,0) = e^{-x^2} \qquad (-\infty < x < \infty) \qquad (4)$$

問１　式(3)の両辺を x に関してフーリエ変換し，$U(\omega,t)$ の t に関する微分方程式を導け。

問２　$U(\omega,0)$ を求めよ。ただし，以下の式を用いてもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+\beta)^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (5)$$

ここで，α は正の実数，β は複素数である。

問３　問１と問２で得られた結果を用いて，$U(\omega,t)$ を求めよ。

問４　問３で求めた $U(\omega,t)$ を逆フーリエ変換し，$u(x,t)$ を求めよ。

（問題４終わり）