

専門科目  
(午前：数学(必須))

29 大修  
時間 9:30~10:30

## 機械系・システム制御系

### 注意事項

1. 問題1から問題3の全てに解答しなさい。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 解答は、必ず問題毎に別々の解答用紙に記入しなさい。  
各問題の解答は裏面も使用できますが、1枚に収めること。
4. 各解答用紙には、必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。  
問題番号は試験科目名欄に書きなさい。  
氏名を書いてはいけません。

### 問題 1

(1) 円  $x^2 + (y-2)^2 \leq 1$ ,  $z=0$  を  $x$  軸周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(2) 行列  $A = \begin{bmatrix} x & x & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & x & x \end{bmatrix}$  の固有値が重複しないための実数  $x$  の条件を答えよ。

(3) 経路  $C$  が  $z = 2\sqrt{2} \cos \theta + i\sqrt{2} \sin \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) で与えられる複素平面上の楕円であるとき、次の複素積分の値を求めよ。ただし  $i = \sqrt{-1}$  とし、積分経路は反時計回りに取ること。

$$\oint_C \frac{5}{(z-2-2i)(z+1-i)} dz$$

(4) 次の偏微分方程式の一般解  $f(x, y)$  を求めよ。

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = -4f$$

### 問題 2

3次元ユークリッド空間中の3つの点  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(0, 1, 2)$ ,  $C(x, 1-x, 0)$  および原点  $O$  を考える。ここで  $x$  は  $-1 \leq x \leq 1$  の実数とする。

(1) 線分  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  を3辺とする平行六面体  $S$  の体積  $V(x)$  を求めよ。

(2)  $S$  の体積  $V(x)$  の最小値とそのときの  $x$  を求めよ。また、体積  $V(x)$  の最大値とそのときの  $x$  を求めよ。

### 問題 3

次の微分方程式について、以下の問いに答えよ。

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 = 0$$

(1)  $\frac{dy}{dx} = z$  とおき、 $z$  と  $y$  に関する微分方程式を導け。

(2)  $y$  の一般解を  $x$  で表せ。

専門科目  
(午前：物理(必須))

29 大修  
時間 10:45~11:45

## 機械系・システム制御系

### 注意事項

1. 問題1と問題2の両方に解答しなさい。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 解答は、必ず問題毎に別々の解答用紙に記入しなさい。  
各問題の解答は裏面も使用できますが、1枚に収めること。
4. 各解答用紙には、必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。  
問題番号は試験科目名欄に書きなさい。  
氏名を書いてはいけません。

## 問題 1

図 1 に示すように、おもりと糸からなる振り子の鉛直面内の運動について考える。振り子の糸は、固定した支点  $O$  に置かれた滑車を介して手で支えられている。おもりの質量を  $m$ 、振り子の鉛直下方からの振れ角を  $\theta$ 、支点  $O$  からおもりまでの糸の長さを  $l$ 、重力加速度を  $g$  とする。ただし、おもりは質点とみなし、糸の質量や伸縮、滑車の大きさ、摩擦は無視せよ。また、振り子の振れ角  $\theta$  は小さいとし、 $\sin\theta \simeq \theta$ 、 $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$  とせよ。

糸の長さ  $l$  が一定のとき、振り子の振動エネルギー  $E$  と角周波数  $\omega$  は一定であることを以下の手順で示せ。ここで振動エネルギーとは、おもりの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和である。ただし、この  $E$  におけるポテンシャルエネルギーはおもりの最下点で 0 とする。

- (1) 振り子の  $\theta$  方向の運動方程式を導け。
- (2)  $\theta$  を時間  $t$  の関数として求めよ。ただし、時刻  $t=0$  で  $d\theta/dt = 0$  かつ  $\theta = a$  (ここに  $a$  は最大振れ角) とする。また、 $\omega$  が時間によらず一定であることを示せ。
- (3) (2) の結果を用いて、振動エネルギー  $E$  を求めよ。また、 $E$  が時間によらず一定であることを示せ。

振り子の振動に比べて非常にゆっくりと糸をたぐるか、くり出すかして  $l$  を変化させると、 $E$  と  $\omega$  は徐々に変化するが、 $E/\omega$  は一定のままである ( $E/\omega$  は断熱不変量と呼ばれる)。このことを以下の手順で示せ。ただし、 $l$  の変化率は非常に小さく  $d^2l/dt^2 = 0$  としてよい。

- (4) (2) の結果を用いて、糸の張力  $T$  を時間  $t$  の関数として求めよ。
- (5) 振り子の糸の長さをわずかに  $\Delta l$  だけ変化させる。この間に、振り子は何回も振動するものとする。このとき、手が行う仕事は  $\Delta W = -\langle T \rangle \Delta l$  と近似できる。 $\Delta W$  を求めよ。ただし、 $\langle \rangle$  は時間平均を表し、 $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$  である。
- (6) 糸の長さを  $\Delta l$  だけ変化させたとき、おもりの最下点の高さが変化することによる振り子のポテンシャルエネルギーの変化  $\Delta V$  を求めよ。
- (7) 振り子の振動エネルギーの変化  $\Delta E$  は、 $\Delta W$  から  $\Delta V$  を差し引いたものである。(5)、(6) の結果と (3) で求めた  $E$  を用いて、振動エネルギーの変化  $\Delta E$  を  $E, l, \Delta l$  で表せ。
- (8)  $E/\omega$  が一定であること、すなわち、 $d(E/\omega) = (1/\omega^2)(\omega dE - E d\omega) = 0$  を示せ。ただし、(7) の結果の  $\Delta E, \Delta l$  をそれぞれ  $dE, dl$  で置き換えて用いよ。
- (9) 糸をたぐって ( $\Delta l < 0$ ) おもりを持ち上げると、振り子の最大振れ角はどうなるか。理由も述べよ。

(次ページに続く)

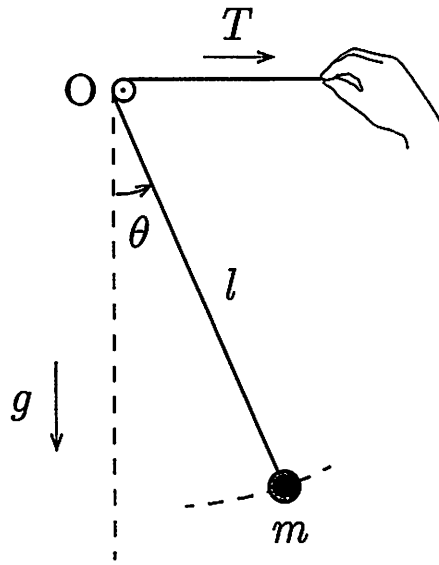


図 1

(問題 1 終わり)

## 問題 2

図 2 (a) のような、2 枚の同一の円板、両者を剛につなぐ軸、軸の中央に一様に巻かれた伸縮しないひもからなるヨーヨーがある。円板の密度は均一である。軸は円板と同軸で、質量は円板と比較して十分に小さく無視できるものとする。また、ひもは太さと質量が無視でき、巻き数が増えても常に軸中央に巻かれるものとする。ヨーヨーの質量を  $m$ 、円板の半径を  $R$ 、軸の半径を  $r$  とする。このとき、ヨーヨーの軸回りの慣性モーメントは  $mR^2/2$  である。なお  $R > r$  である。図 2 (b) のように、反時計回りに巻かれたひもを長さ  $L$  だけ繰り出した状態で、ヨーヨーを水平な床の上に静止状態で置く。ひもの端部を水平方向右向きに一定の張力  $T$  で引き、ヨーヨーが床と滑ることなく転がる場合の運動について考える。床とヨーヨーの静止摩擦係数を  $\mu$ 、重力加速度を  $g$  とし、転がり抵抗、空気抵抗は無視できるものとする。ヨーヨーの位置  $x$  は右向きを正とし、初期位置を  $x=0$  とする。ヨーヨーの回転角度  $\theta$  は反時計回りを正とし、初期角度を  $\theta=0$  とする。

- (1) 滑らないこと条件から、並進の加速度  $\ddot{x}$  と回転の角加速度  $\ddot{\theta}$  の関係を示せ。ただし、文字の上のドット記号は時間微分を表す。
- (2) 張力  $T$  によって引かれることで、床とヨーヨーの間で発生する摩擦力を、図 2 (b) のように  $F$  とする。このとき、ヨーヨーの並進と回転の運動方程式をそれぞれ求めよ。
- (3) (1), (2) の結果から  $\ddot{\theta}$  を張力  $T$  を用いて表せ。さらに、ヨーヨーが右に転がり、ひもが巻かれることを示せ。
- (4) ヨーヨーが床と滑らずに転がるのが可能な張力  $T$  の最大値  $T_{\max}$  を求めよ。
- (5) (4) で求めた  $T_{\max}$  でひもを引いた場合、繰り出された長さ  $L$  のひもがすべて巻き取られるまでの時間  $\tau$  を求めよ。
- (6) ヨーヨーの軸の半径  $r$  を変えることで、時間  $\tau$  が最小となる  $r/R$  を求めよ。

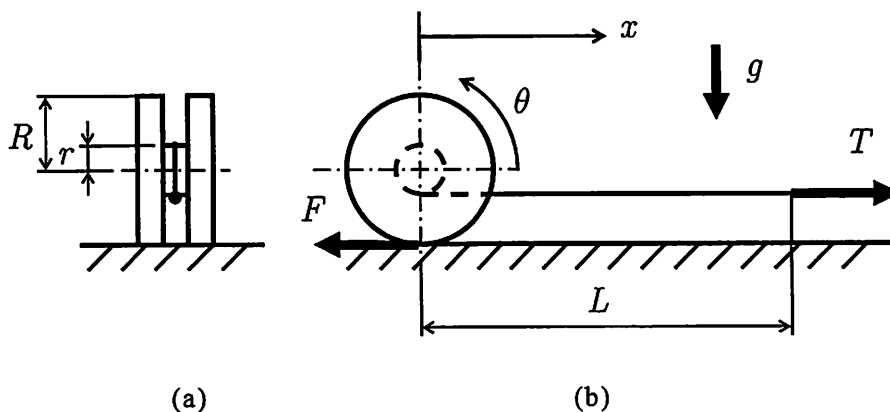


図 2

(問題 2 終わり)

専門科目  
(午後：選択)

29 大修  
時間 13:30～16:30

## 機械系・システム制御系

### 注意事項

1. 問題1から問題8より4問を選択して解答しなさい。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 解答は、必ず問題毎に別々の解答用紙に記入しなさい。  
各問題の解答は裏面も使用できますが、1枚に収めること。
4. 各解答用紙には、必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。  
問題番号は試験科目名欄に書きなさい。  
氏名を書いてはいけません。

問題 1 (材料・加工)

問 1 図 1 に Pb-Sn 合金の平衡状態図を示す。これについて以下の問いに答えよ。

- (1) 183°Cで液相,  $\alpha$ 相,  $\beta$ 相の三相が平衡状態で共存する点がある。この点を何と呼ぶか答えよ。
- (2) (1)の状態における液相,  $\alpha$ 相,  $\beta$ 相の化学組成を質量%で答えよ。
- (3) Snを61.9質量%含む融液を徐冷するとき, 183°C直下における $\alpha$ 相と $\beta$ 相の質量比を求めよ。
- (4) Snを10質量%含む融液を100°Cまで徐冷した。このとき $\alpha$ 相と $\beta$ 相の体積比を求めよ。ただし,  $\alpha$ 相と $\beta$ 相の密度は温度や組成によらず, それぞれ $11.3\text{g/cm}^3$ ,  $7.4\text{g/cm}^3$ とする。

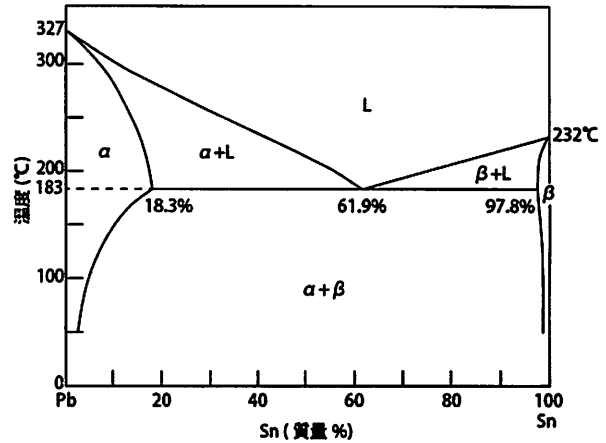


図 1

問 2 以下の ( ① ) ~ ( ⑥ ) にあてはまる数式を答えよ。

図 2(a)は平フライス加工において工具の回転軸方向からみた模式図である。この図に示すような  $xy$  座標系を考え, 工具中心の初期位置  $O$  を原点とする。工具直径, 送り速度, 回転速度, 刃数をそれぞれ  $D$  [mm],  $F$  [mm/min],  $N$  [ $\text{min}^{-1}$ ],  $n$  とする。工具中心は一回転する間に送り方向に ( ① ) だけ移動するため, 図 2(b)のように切れ刃 2 が  $\phi$  [rad] 回転した状態の中心位置  $C$  は  $x =$  ( ② ) であり, 切れ刃 2 の先端の座標は  $x =$  ( ③ ),  $y =$  ( ④ ) で与えられ, 刃先の軌跡はトロコイドとなる。この軌跡は加工面近傍では半径  $D/2$  の円軌跡として近似できるため, 加工面の断面は図 2(c)のように 1 刃当たりの送り量 ( ⑤ ) 間隔で円弧をつなげた形状となり, 最大高さ  $R_z$  の理論値は ( ⑥ ) となる。ただし,  $R_z \ll D/2$  とする。

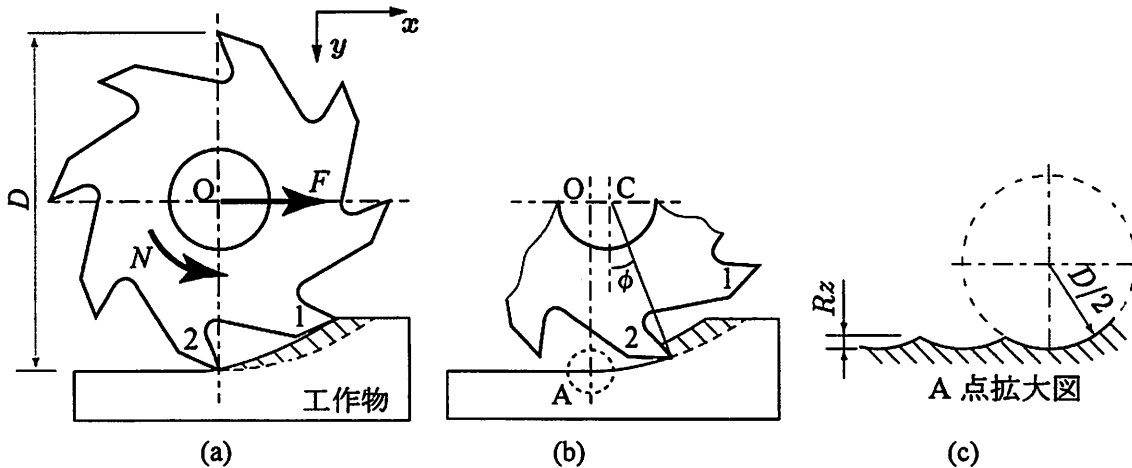


図 2

(次ページに続く)



問3 以下の ( ① ) ~ ( ④ ) にあてはまる数式を、また ( ⑤ ) および ( ⑥ ) にあてはまる数値を有効数字二桁で答えよ。

- (1) 格子定数  $a$  の面心立方格子および体心立方格子を考える。この場合、原子間距離はそれぞれ ( ① ) および ( ② ) と表せる。また、充填率はそれぞれ ( ③ ) および ( ④ ) と表せる。
- (2) ある物質の結晶構造が面心立方格子から体心立方格子に変態した場合、原子直径が変化しなければその体積は ( ⑤ ) % 増加する。
- (3) 直径  $2\text{\AA}$  の原子で構成されている面心立方格子構造を考える。格子の大きさを変えずに、その中央に別の原子を導入する場合、収まる原子の最大直径は ( ⑥ )  $\text{\AA}$  である。

問4 以下の ( ① ) ~ ( ⑱ ) にあてはまる語句を答えよ。

- (1) 半導体やMEMSのデバイス作製において微細構造をパターンニングするのに、酸やアルカリの液体を用いる ( ① ) エッチングと、真空プロセスである ( ② ) エッチングが利用される。
- (2) ジュラルミンなどの金属においてみられる ( ③ ) とは、加熱とその後の急冷により内部が過飽和固溶体となり ( ④ ) が析出して、線欠陥である ( ⑤ ) が移動しにくくなり硬化する現象である。
- (3) めっきは、部材表面の耐食性・( ⑥ )・( ⑦ )・美観などの向上を目的に適用される表面処理の一種であり、液相中での処理法は、直流電流を通じた ( ⑧ )、電圧を印加せず化学反応を利用する ( ⑨ )、熔融金属浴中に部品を浸漬する熔融めっきに大別される。
- (4) 平坦に加工された表面の形状精度は、幾何学的平面からの狂いである ( ⑩ )、比較的長い周期の凹凸である ( ⑪ )、微細な凹凸である ( ⑫ ) によって評価される。
- (5) 0.8% C の炭素鋼を ( ⑬ ) 鋼とよび、その徐冷組織は ( ⑭ ) と ( ⑮ ) の混合したパーライトとなる。
- (6) 切削では、刃部となる ( ⑯ ) をシャンクまたはホルダに機械的に固定した工具が用いられ、その代表的な材料である ( ⑰ ) は炭化タングステン粉に少量のコバルト粉を混合して液相 ( ⑱ ) したものである。

(問題1 終わり)

## 問題 2 (材料力学)

問 1 次の文章の  内に最も適する数式を解答せよ。ただし、縦弾性係数を  $E$ 、横弾性係数を  $G$ 、ポアソン比を  $\nu$ 、線膨張係数を  $\alpha$  とする。また、応力集中の影響は無視せよ。

- (1) 図 1 に示すような両端を固定した段付丸棒 ACB がある。中央 C 部分に図中に示す方向に力  $F$  を負荷したとき、丸棒 AC に生じる応力は  ① であり、丸棒 CB に生じる応力は  ② である。続いて、丸棒 ACB に  $F$  を負荷したまま温度を  $\Delta T$  だけ上昇させると、丸棒 AC に生じる応力は  ③ となり、丸棒 CB に生じる応力は  ④ となる。

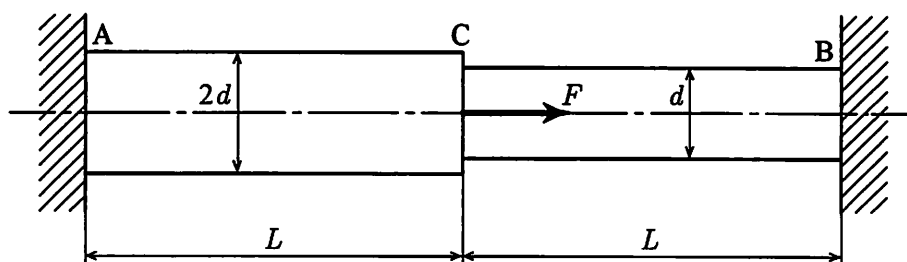


図 1

- (2) 直径  $d$ 、肉厚  $t$  ( $t \ll d$ ) の両端閉じ薄肉円筒に内圧  $p$  を負荷する。このとき、薄肉円筒の軸方向に生じる応力は  ⑤ であり、円周方向に生じる応力は  ⑥ である。また、この薄肉円筒の軸方向に生じるひずみは  ⑦ であり、最大せん断ひずみは  ⑧ である。
- (3) 図 2 に示すような段付き丸軸 ACB の両端にねじりモーメント  $T$  を負荷する。このとき、丸軸 AC に生じる比ねじれ角は  ⑨ であり、丸軸 CB に生じる最大せん断応力は  ⑩ である。

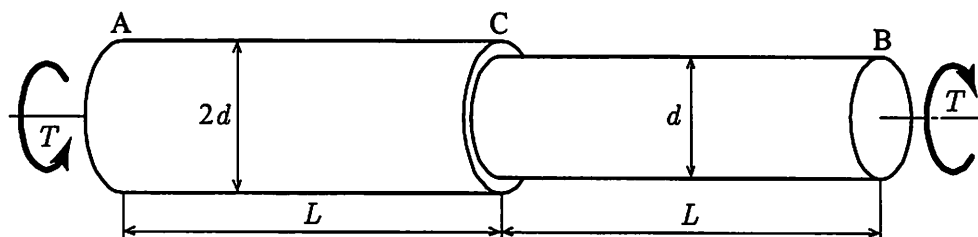


図 2

問2 図3に示すように、一端Aが固定された1/4円弧状の曲りはりABがある。曲りはりABの曲率半径は $R$ 、曲げ剛性は $EI$ である。また、図中に示すように $x$ - $y$ 座標をとり、 $x$ 軸からの角度を $\theta$ とする。B端に $x$ 方向に力 $F$ を負荷したときのB端の $x$ 方向変位 $\delta$ をカスチリアノ（Castigliano）の定理を用いて求めたい。次の文章の□内に最も適する数式を解答せよ。

- (1) はりの任意の断面に生じる曲げモーメントを $M$ とするとき、その断面における単位長さ当たりの弾性ひずみエネルギーは $M$ を用いて□⑪で表される。
- (2) はりの $\theta$ の位置の断面に生じる曲げモーメント $M$ は、□⑫である。
- (3) はり全体に貯えられる弾性ひずみエネルギー $U$ は、□⑬である。
- (4) カスチリアノの定理によれば、B端の $x$ 方向変位 $\delta$ は $U$ を用いて□⑭と表される。
- (5) (3)と(4)の結果より、 $\delta$ は□⑮と求められる。

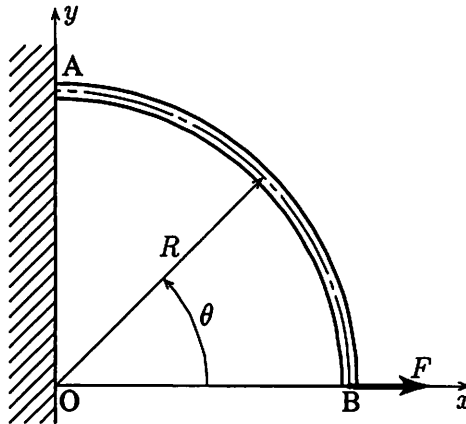


図3

### 問題 3 (機構運動・機械力学)

問 1 図 1 に示すような、直動式 2 自由度平面機構を考える。節 OA は静止節であり、点 A の座標は  $(a, 0)$  である。点 O, 点 A の位置には受動回転対偶があり、節 OB と節 BP, 節 AC と節 CP はそれぞれ能動直進対偶 B, C を介して接続されている。また節 BP と節 CP は点 P の位置にある受動回転対偶で接続されている。点 P の座標は  $(x_p, y_p)$  である。OP と AP の長さをそれぞれ  $l_1, l_2$  とする。ただし、節 OA は他の節の運動を妨げないものとし、また  $a$  は正とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{l}_1 \ \dot{l}_2]^T$  と  $\mathbf{v} = [\dot{x}_p \ \dot{y}_p]^T$  の関係は、ある行列  $\mathbf{J}$  を用いると  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\mathbf{v}$  と表すことができる。この行列  $\mathbf{J}$  を  $x_p, y_p, a$  を用いて表せ。
- (2) 点 P に外力  $\mathbf{F} = [f_x \ f_y]^T$  が作用し、これに対し能動直進対偶が駆動力  $\boldsymbol{\tau} = [f_1 \ f_2]^T$  を発揮しつり合っているとす。ここで  $f_1$  は能動直進対偶 B の駆動力、 $f_2$  は能動直進対偶 C の駆動力であり、それぞれ伸長方向を正とする。このとき  $\mathbf{F} = -\mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau}$  となることを示せ。
- (3) この機構において  $\det(\mathbf{J}) = 0$  となる条件を求めよ。
- (4)  $\det(\mathbf{J}) = 0$  となる状態を機構学において何と呼ぶか。また、この機構におけるこの状態の物理的な意味を 150 文字程度で説明せよ。

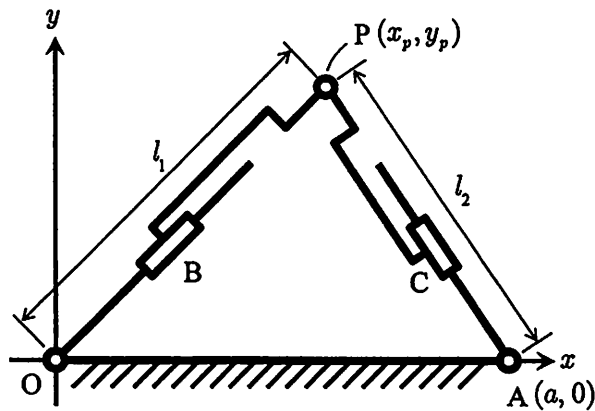


図 1

問2 図2に示す2自由度振動系を考える。質点A(質量 $2M$ )は、ばね定数 $2k$ のばねで壁と接続され、さらに、ばね定数 $k$ のばねで質点B(質量 $\alpha M$ )と接続されている。ばねの長さが自然長のときの各質点の位置を座標 $x_1, x_2$ の原点とする。なお、ばねの質量、および、質点と水平な床との摩擦は無視する。以下の問いに答えよ。

- (1) この2自由度振動系の固有角振動数をすべて求めよ。
- (2) 質点Aに調和励振力 $F\sin\omega t$ が作用する場合の質点AおよびBの角振動数 $\omega$ での応答振幅 $X_1, X_2$ を求めよ。ここで、励振角振動数 $\omega$ はこの振動系の固有角振動数とは異なる。
- (3) 調和励振力の角振動数 $\omega$ が

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

のときに、以下の(i)と(ii)に答えよ。

- (i) 質点Aの角振動数 $\omega$ での応答振幅 $X_1$ を最小とする $\alpha$ を求めよ。
- (ii) 質点Bの角振動数 $\omega$ での応答振幅 $X_2$ と $\alpha$ の関係を求めよ。

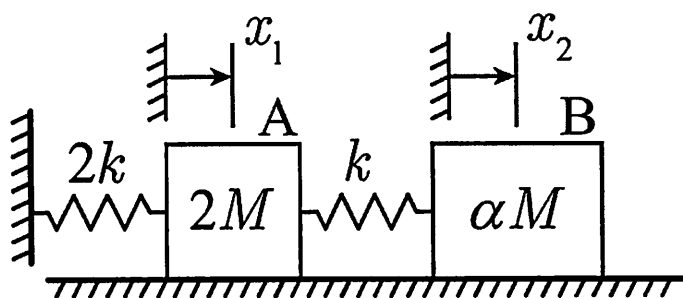


図2

(問題3 終わり)

### 問題 4 (流体力学)

問 1 以下の説明文の①～⑩に該当する数式あるいは語句を解答せよ。

図 1 のような二平板 A, B があり, 平板 A は速度  $U$  で  $x$  方向に移動し, 平板 B は固定されている。この二平板間の二次元流れについて考える。平板 A の表面に沿って  $x$  軸をとり, 平板 A と平板 B の間隔は  $h(x)$  で表される。二平板間の流れは層流で, 粘度  $\eta$  が一定の非圧縮性ニュートン流体と取り扱うことができる。二平板間の間隔は十分に小さく, 流体の圧力は  $y$  方向に一定と仮定してよい。また, 流体に働く体積力と慣性力は粘性力に比べて十分に小さい。

図 1 に示した流体中の微小要素に作用する力の釣合いを考える。流体の圧力  $p$ , せん断応力  $\tau_{yx}$  を用いると,  $x$  方向の力の釣合いより,

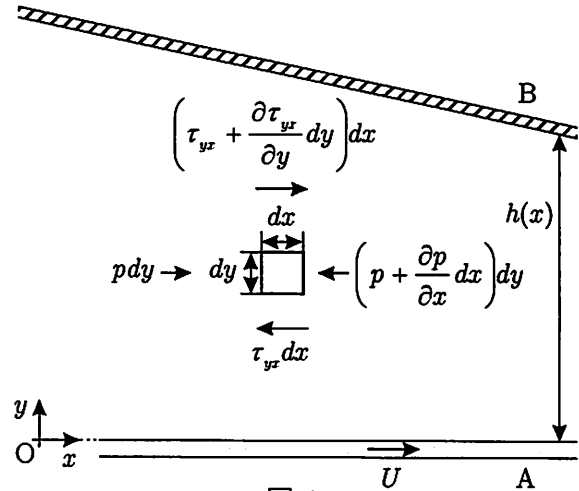


図 1

$$\frac{\partial p}{\partial x} = ( \text{①} ) \quad (i)$$

が得られる。流体速度の  $x$  方向の成分を  $u$  としたとき, せん断応力  $\tau_{yx}$  は粘度  $\eta$  と  $y$  方向の速度勾配  $\partial u / \partial y$  を用いて,

$$\tau_{yx} = ( \text{②} ) \quad (ii)$$

となる。これを式(i)に代入すると,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = ( \text{③} ) \quad (iii)$$

が得られる。式(iii)を  $y$  について積分すると,

$$u = ( \text{④} \quad \text{【注: 積分定数を } c_1, c_2 \text{ として解答せよ】} ) \quad (iv)$$

となり, 図 1 の微小要素を設定した  $x$  方向位置において,  $y = 0$  で  $u = U$ ,  $y = h$  で  $u = 0$  とすると, 次式が得られる。

$$u = ( \text{⑤} ) - ( \text{⑥} ) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (v)$$

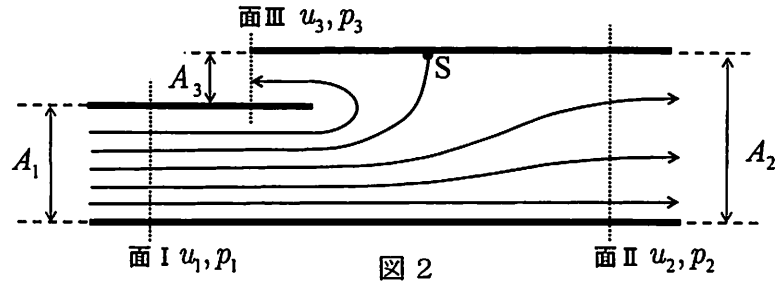
この式の右辺第 1 項は ( ⑦ ) 流れ, 第 2 項は ( ⑧ ) 流れにそれぞれ対応する。

すべり軸受の軸と軸受間のような狭い隙間を流体が流れる場合,  $x$  方向の速度勾配が支配的となり, 連続の式は  $\partial u / \partial x = 0$  と近似してよい。この連続の式を  $y$  方向に  $y = 0$  から  $y = h$  まで積分すると, 次のレイノルズ方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ ( \text{⑨} ) \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = ( \text{⑩} ) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (vi)$$

(次ページに続く)

問2 図2に示す平行で厚さが無視できる板で構成されたディフューザ内の二次元流れを考える。密度  $\rho$  の非圧縮性流体が面 I (面積  $A_1$ ) から流速  $u_1$  で流入する。流出面 (面 II) の面積は  $A_2$  であり、流速



また、上部に設置した面積  $A_3$  を持つ開放口 (面 III) から流体の一部が流速  $u_3$  で外部へ流出する。それぞれの面は流路を構成する板と直交し、各面において流速および圧力は一様であると仮定する。面 I, 面 II, 面 III における圧力は、それぞれ  $p_1, p_2, p_3$  である。また、ディフューザ内の流れは定常であるとし、粘性力、重力は考慮しない。以下の説明文の①~⑬に該当する数式あるいは語句を解答せよ。

- (1) 面 I と面 II を通る質量流量は、それぞれ ( ① ) と ( ② ) で表される。面 I から流入する流体のうち面 II を通る比率 (質量流量比) を  $N$  とした場合、面 III における流速は、 $u_1, A_1, A_3$  および  $N$  を用いて  $u_3 =$  ( ③ ) で与えられる。
- (2) 任意流線に沿って総圧は一定であるため、( ④ ) の定理が成立する。したがって面 III の流速は

$$u_3 = \left( ( ⑤ ) + \frac{( ⑥ )}{\rho} \right)^{1/2} \quad \text{(vii)}$$

で表される。開放口の面積  $A_3$  は、 $\rho, A_1, u_1, p_1, p_3$  および  $N$  を用いて

$$A_3 = ( ⑦ ) \frac{(1-N)}{( ⑧ )} \quad \text{(viii)}$$

と表される。

- (3) 図2に示すように、上部の壁面上に流速がゼロになる点 S が存在する。点 S の圧力を  $p_s$  とする。開放口の圧力  $p_3$  は外部環境の圧力である。 $A_1 > A_3/(1-N)$  の場合、 $p_1, p_2, p_3, p_s$  の大きさの順は不等式

$$( ⑨ ) < ( ⑩ ) < ( ⑪ ) < ( ⑫ ) \quad \text{(ix)}$$

で表すことができる。点 S から壁面に沿って流れ方向に圧力は単調に ( ⑬ ) する。このような場合、壁面において剥離は発生しない。

## 問題5 (熱力学・伝熱工学)

問1 以下の(1)~(3)の( )にあてはまるものとして、最も適切なものを選択肢より選び、記号で答えよ。ただし、同じ選択肢を複数回使用してもよい。

(1) 理想気体における準静的過程は、「 $pv^n = \text{定数}$ 」で表されるポリトロープ過程として示すことができる ( $p$  は圧力,  $v$  は比体積,  $n$  はポリトロープ指数)。このとき、等圧変化は  $n =$  ( ① ), 等温変化は  $n =$  ( ② ), 断熱変化は  $n =$  ( ③ ), 等積変化は  $n =$  ( ④ ) で表すことができる。  $n \neq 1$  のとき, 1 kg の理想気体が外部に対してなす仕事 (状態1 ( $p_1, v_1, T_1$ ) から状態2 ( $p_2, v_2, T_2$ ) へ) は ( ⑤ ) で与えられる。ただし, 温度を  $T$ , 比熱比を  $\kappa$ , 気体定数を  $R$  とする。

(a)  $-1$       (b)  $0$       (c)  $1$       (d)  $2$       (e)  $\kappa$       (f)  $R$       (g)  $\infty$

(h)  $\frac{1}{n-1} RT_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$       (i)  $\frac{1}{n-1} RT_2 \ln \frac{p_2}{p_1}$       (j)  $\frac{1}{n-1} RT_1 \ln \frac{v_1}{v_2}$

(k)  $\frac{1}{n-1} RT_2 \ln \frac{v_2}{v_1}$       (l)  $\frac{1}{n-1} R(T_1 - T_2)$       (m)  $\frac{1}{n-1} R(T_2 - T_1)$

(2) 非粘性流体が主流速度  $u$ , 主流温度  $T$  で流れている開いた系を考える。流体の定圧比熱を  $c_p$  で一定とした場合, 流れの中に置かれた物体前縁のよどみ点における全温度  $T_0$  は ( ⑥ ) で与えられる。ただし, 系内でのエネルギー損失はないものとする。

(a)  $T + \frac{u^2}{c_p}$       (b)  $T + \frac{u^2}{2c_p}$       (c)  $T + \frac{2u^2}{c_p}$       (d)  $T + \frac{u^2}{3c_p}$       (e)  $T + \frac{3u^2}{c_p}$

(3) 伝熱現象を一般的に記述するために無次元数が用いられる。管内の発達した層流では, 管壁と流体間の伝熱に関する無次元数である ( ⑦ ) 数は, 約4とほぼ一定値を取る。これは, 管径の増大によって熱伝達率は ( ⑧ ) ということである。また, 運動量の拡散と熱の拡散の比を表す ( ⑨ ) 数は, 対流伝熱に広く用いられ, 二原子分子気体では種類や温度によらずほぼ ( ⑩ ) と一定値をとる一方, 液体では温度に強く依存し温度上昇とともに ( ⑪ )。自然対流の記述には ( ⑫ ) 数が用いられ, これは代表長さの ( ⑬ ) 乗に比例し, 鉛直等温壁からの伝熱では10の ( ⑭ ) 乗近傍が乱流遷移の目安を与える。

(a) 0.1      (b) 0.3      (c) 0.5      (d) 0.7      (e) 2      (f) 3      (g) 4      (h) 5      (i) 7      (j) 9  
 (k) 大きくなる (上昇する)      (l) 小さくなる (低下する)      (m) 変化しない  
 (n) マッハ      (o) シュミット      (p) プラントル      (q) ピオ      (r) レイリー  
 (s) ヌッセルト      (t) キャピラリー      (u) レイノルズ

(次ページに続く)



問2 黒体面からなる正六面体内の閉空間におけるふく射伝熱を考える。底面を面1, 上面を面6, 4つの側面をそれぞれ面2, 面3, 面4, 面5, と番号を付けて区別する。面*i* (*i* = 1~6) から面*j* (*j* = 1~6) をのぞむ形態係数を  $F_{ij}$  と表すとき, 任意の二面間の形態係数には  $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$  が成立する。ここで,  $A_i, A_j$  は面*i*, 面*j*の面積を表す。 $F_{16} = 0.2$  とするとき,  $F_{21}$  を求めよ。

問3 以下の ( ① ) から ( ③ ) にあてはまる値を答えよ。

外気温が 270 K のとき, 室内に 1200 W の熱を供給することで室内の温度を 300 K に保っている。この暖房をヒートポンプで行うとき, 熱力学第二法則が与える暖房機の最小消費電力は ( ① ) W である。もしこのヒートポンプの消費電力がその2倍であったならば, その成績係数は ( ② ) である。また, もしこの暖房を電熱ヒーターで行った場合には, その成績係数は ( ③ ) になる。

問4 図1(a)に示されるように, シリンダーとピストンにより封入された気体定数  $R = 350 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ , 質量  $m = 2.0 \text{ kg}$ , 温度  $T_a = 300 \text{ K}$ , 定圧比熱  $c_p = 1 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$  の理想気体を熱量  $Q$  により準静的に等圧のもとで加熱し, 質量  $M = 100 \text{ kg}$  の物体 A を鉛直上方に距離  $L = 10 \text{ m}$  持ち上げて図1(b)の状態にする。ピストンの質量, シリンダーとの摩擦を無視し, 重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  とする場合に以下の問いに答えよ。なお, 解答はすべて数値で答え, 必要に応じて  $x$  が 1 より十分に小さいとき近似式  $\ln(1+x) \approx x$  を用いてもよい。

- (1) 物体 A を持ち上げる仕事量  $W$  [kJ] を求めよ。
- (2) 図1(b)の状態における温度  $T_b$  [K] を求めよ。
- (3) 加熱量  $Q$  [kJ] を求めよ。
- (4) 気体の内部エネルギーの変化量  $\Delta U$  [kJ] を求めよ。
- (5) 気体のエントロピーの変化量  $\Delta S$  [kJ/K] を求めよ。

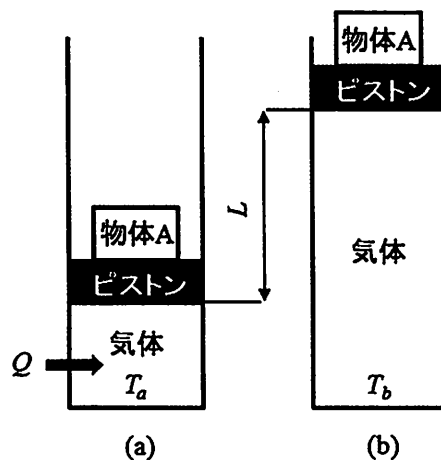


図1

(問題5 終わり)

## 問題 6 (制御理論)

問 1 図 1 に示すシステムを考える。ただし  $r(s)$ ,  $y(s)$ ,  $d(s)$  はそれぞれ入力  $r(t)$ , 出力  $y(t)$ , 外乱  $d(t)$  をラプラス変換したものとする。また文中の  $K$  は正の定数とする。

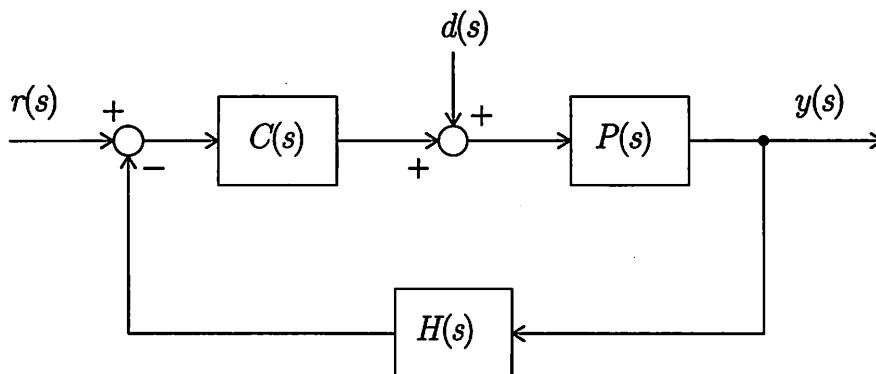


図 1

- (1)  $H(s) = 0$ , すなわちフィードバックが無いとき,  $y(s)$  を  $C(s)$ ,  $P(s)$ ,  $r(s)$ ,  $d(s)$  により表せ。
- (2)  $C(s) = K$ ,  $P(s) = \frac{1}{s+1}$ ,  $H(s) = 0$  のシステムに  $r(t) = 0$ ,  $d(t) = 1$  が印加されたとき,  $y(t)$  の定常値を求めよ。
- (3)  $H(s) = 1$ , すなわちフィードバックが有るとき,  $y(s)$  を  $C(s)$ ,  $P(s)$ ,  $r(s)$ ,  $d(s)$  により表せ。
- (4)  $C(s) = K$ ,  $P(s) = \frac{1}{s+1}$ ,  $H(s) = 1$  のシステムに  $r(t) = 0$ ,  $d(t) = 1$  が印加されたとき, (2) の場合と比べて  $y(t)$  の定常値が何倍になるか求めよ。
- (5)  $C(s) = \frac{K}{s}$ ,  $P(s) = \frac{1}{s+1}$ ,  $H(s) = 1$  としたとき, ナイキスト軌跡の概形を図示し, 安定性を判定せよ。
- (6) 新たに  $P(s) = \frac{1}{s-1}$  が与えられた。  $H(s) = 1$  とし,  $C(s) = \frac{K(s-1)}{s+1}$  とコントローラを定めたとき, このシステムが内部安定であるか判定せよ。その際,  $K$  の値との関係に言及せよ。

(次ページに続く)

問2 次の状態方程式で表されるシステムについて以下の問いに答えよ。ただし、 $a$ は実数とする。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 2 & a-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$y = Cx, \quad C = (1 \ 2)$$

- (1) この状態方程式の可制御性を判断せよ。  
(2) 以下の座標変換を用いて、状態を  $\bar{x}$  とする状態方程式を求めよ。

$$x = T\bar{x}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

- (3)  $\bar{x}$  座標系での状態フィードバック

$$u = \bar{F}\bar{x}, \quad \bar{F} = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2)$$

- を施した  $\bar{x}$  座標系での閉ループ系の状態方程式を示し、閉ループ系の極を求めよ。  
(4) (3)の状態フィードバックにより閉ループ系が安定化できるための  $a$  の条件を求めよ。  
(5) 閉ループ系の極が重根となる(3)の状態フィードバックをすべて求めよ。

## 問題7 (信号処理)

問1 図1に示す関数 $x(t)$ のフーリエ変換を以下の手順に従って求めよ。

- (1) 図2に示す矩形関数 $r(t)$ のフーリエ変換 $R(f)$ を求めよ。
- (2) ある関数 $y(t)$ のフーリエ変換を $Y(f)$ とすると、 $w(t) = y(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ のフーリエ変換 $W(f)$ を $Y(f)$ を用いて表せ。
- (3)  $x(t) = r(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ であることを用いて、関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ を求めよ。

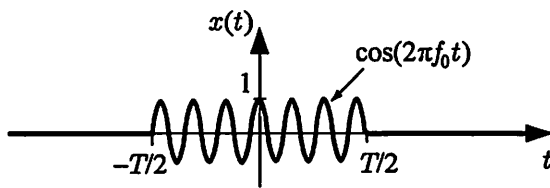


図1

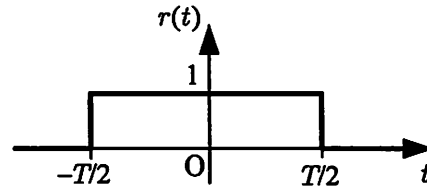


図2

問2  $X$ は離散確率変数であり、次式のポアソン分布に従うとする。ここで、 $\lambda$ は正の定数である。このとき、以下の問いに答えよ。また、導出過程も示せ。

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- (1) 任意の確率変数 $Y$ の平均(期待値) $\mu$ と分散 $\sigma^2$ に対して、 $\sigma^2 = E[Y^2] - \mu^2$ が成立することを示せ。ただし、 $E[Y^2]$ は $Y^2$ の平均(期待値)を表すものとする。
- (2) マクローリン展開 $e^\lambda = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ を利用して、次式で表されるポアソン分布の全確率が1になることを示せ。

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

- (3)  $X$ の平均(期待値)を、 $\lambda$ を用いて表せ。
- (4)  $X$ の分散を、 $\lambda$ を用いて表せ。
- (5)  $X_1$ と $X_2$ は互いに独立なポアソン分布に従う離散確率変数とする。 $X_1$ の平均(期待値)が $\mu_1$ 、 $X_2$ の平均(期待値)が $\mu_2$ であるとき、 $Z = aX_1 + bX_2$ の平均(期待値)と分散を、 $\mu_1, \mu_2, a$ および $b$ を用いて表せ。ただし、 $a$ と $b$ は定数とする。

(次ページに続く)

問3 音源からの音波を2つのマイクによって受信し、その信号から音源の方向を推定する方法を考える。[A]～[G]の空欄を最も適切な数式または語句で埋めよ。ただし、[E]は導出過程も示せ。

図3のように、距離 $L$ だけ離れた2つのマイク $M_1, M_2$ によって方位角 $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ )にある音源 $S$ から発信されている音波を受信する。時刻 $t$ において $M_1, M_2$ で受信した信号をそれぞれ $x_1(t), x_2(t)$ とする。ここで、 $S$ から2つのマイクまでの距離は $L$ に比べて十分に長く、マイクに到達する音波は平面波と見なすことができるとする。

$S$ から $M_1$ および $M_2$ までの距離には差 $L \sin \theta$ があるので、 $M_1$ と $M_2$ では音波が到達する時間に差が生じる。音速を $c$ とすると、音波の $M_1$ に対する $M_2$ の到達時間差は[A]である。

一般に、時間差のある信号を観測し、そこからその時間差を推定するには、[B]関数が利用される。すなわち

$$R_{12}(\tau) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{2w} \int_{-w}^w x_1(t) x_2(t + \tau) dt$$

を求め、その最大値を与える $\tau$ を信号の時間差として推定する。

ここで、 $S$ から発信される音波が正弦波であり、 $x_1(t) = \sin(2\pi ft)$ と表されるとすると、 $x_2(t) = \sin([C])$ と表される。また、 $R_{12}(\tau)$ は周期 $1/f$ の関数であることを利用すると、

$$R_{12}(\tau) = f \int_0^{1/f} [D] dt$$

と表すことができる。三角関数の積和の公式を利用したのちに積分を計算すると、

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2} \cos([E]) \quad (\text{導出過程も示せ}) \quad (1)$$

となる。

式(1)で表される $R_{12}(\tau)$ では、最大値が周期的に現れるが、ある条件の下では、 $R_{12}(\tau)$ の最大値を与える $\tau$ のうち、 $\tau \geq 0$ で最小のものを音波の到達時間差と推定することができる。その到達時間差の推定値を $\hat{\tau}$ とすれば、音源 $S$ の方位角の推定値 $\hat{\theta}$ は、 $\hat{\theta} = [F]$ として得られる。ここで、上記の「ある条件」とは、 $\frac{L \sin \theta}{c} < [G]$ である。

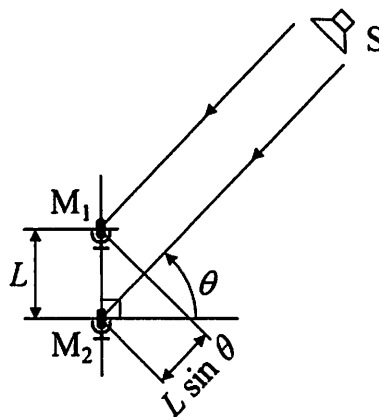


図3

(問題7 終わり)

## 問題 8 (電気回路)

問 1 以下の問いに答えよ。

(1) 図 1 のように角周波数  $\omega$  の正弦波電圧源とインピーダンス  $Z$  からなる回路を考える。電源からインピーダンス  $Z$  へ供給される複素電力  $P_c$  と実効電力  $P$  を、電圧の複素表示  $E$  と  $Z$  を用いて表せ。

(2) 図 2 のように、角周波数  $\omega$  の交流電源で駆動される自己インダクタンス  $L_1$ ,  $L_2$ , 相互インダクタンス  $M$  である変成器を考える。この回路の  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  の間には次の関係がある。

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$$

$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2$$

この回路に等価な図 3 の回路を考える。  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  を求めよ。

(3) 図 4 の回路の 1 次側から見た入力インピーダンス  $Z_a$  は次式で表される。

$$Z_a = j\omega \textcircled{1} + \frac{\textcircled{4}}{j\omega \textcircled{2} + \textcircled{3}}$$

① ~ ④ に当てはまる式を求めよ。

(4) 図 4 の回路で、  $Z$  が抵抗  $R$  の抵抗器である場合を考える。このとき、回路で消費される実効電力  $P$  と抵抗値  $R$  の関係を、横軸  $R$ , 縦軸  $P$  としてその概形を描き、  $P$  が最大となる  $R$  を求めよ。ただし、  $M^2 - L_1 L_2 < 0$  とする。

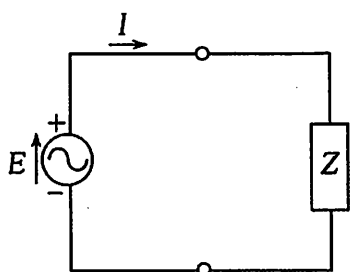


図 1

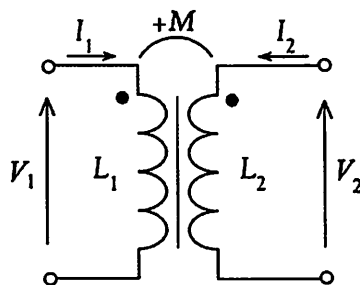


図 2

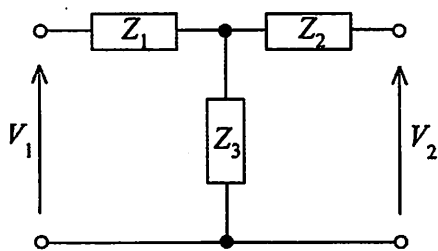


図 3

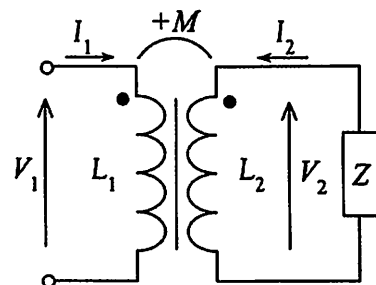


図 4

(次ページに続く)

問2 図5に示すように交流電源で負荷を駆動する回路を考える。ここで、 $S$ は角周波数 $\omega$ の正弦波交流電源を表し、 $E$ は理想電圧源の電圧、 $R_0$ は内部抵抗の大きさを示す。 $N$ は伝送路を表す二端子対回路で、負荷は大きさ $R_1$ の抵抗である。また、各接続端子間の電圧 $V_1$ 、 $V_2$ 、および電流 $I_1$ 、 $I_2$ の間には $Z$ 行列 $\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$ を用いて次式の関係が成り立つものとする。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ。

- (1)  $V_1$ と $V_2$ を求めよ。ただし、 $V_1$ は $E$ 、 $R_0$ 、 $I_1$ を、 $V_2$ は $R_1$ 、 $I_2$ を用いて表すこと。
- (2)  $V_2$ と $I_2$ を $E$ 、 $R_0$ 、 $R_1$ および $Z$ 行列の要素を用いて求めよ。
- (3) 図5の端子2-2'を開放した場合の端子2-2'間の開放電圧 $V_f$ を求めよ。
- (4) 端子2-2'から左側の等価回路として、(3)で求めた電圧 $V_f$ の電圧源とインピーダンス $Z_f$ で構成された図6の回路を考える。このとき $Z_f$ は次式で表される。

$$Z_f = \frac{\text{②} Z_{22} - \text{③} Z_{21}}{\text{①}}$$

①～③に当てはまる式を求めよ。

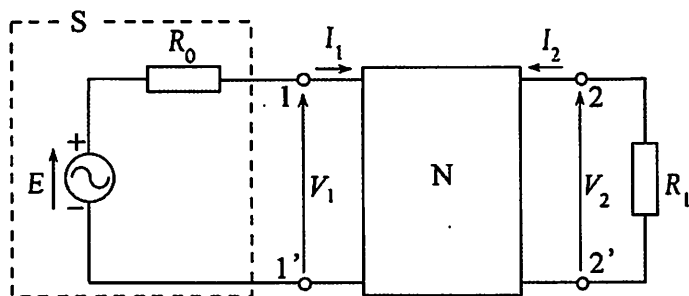


図5

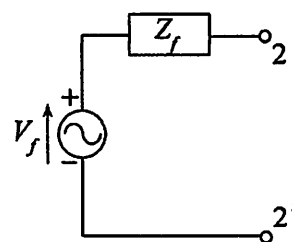


図6

(問題8 終わり)