

筆答専門試験科目 (午前)

31 大修

物理学系

時間 9:30-11:30

物理学 (午前)

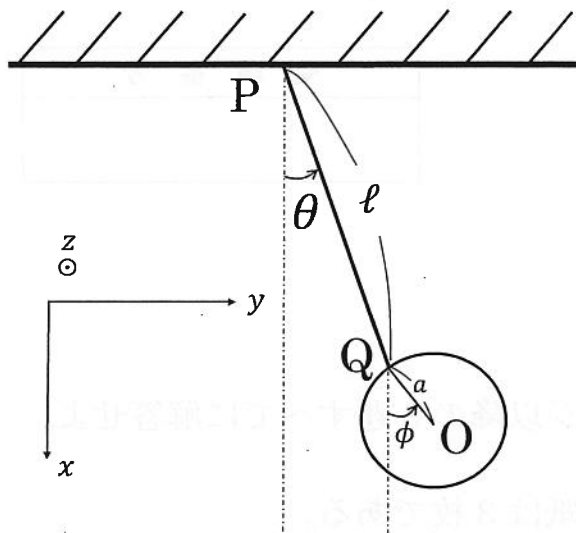
受験番号

注意事項

1. 次ページ以降の3題すべてに解答せよ。
2. 答案用紙は3枚である。
3. 解答は1題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。
4. 各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。
5. 答案用紙は、解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。
6. 問題冊子および計算用紙の第1ページに受験番号を記入せよ。
7. 問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

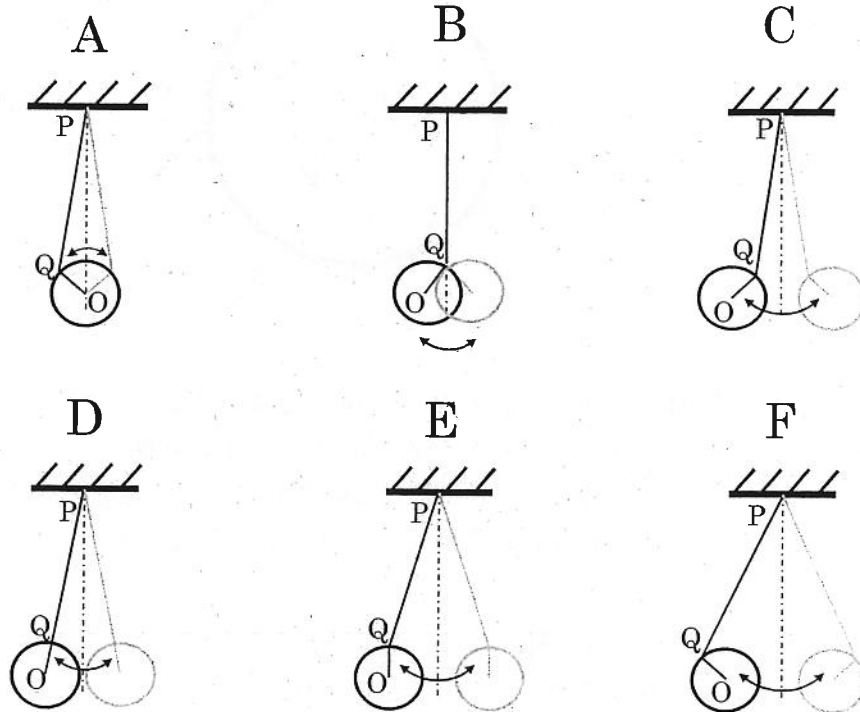
1

天井のある点Pから吊るされた太さが無視できる長さ l 、質量 m の剛体棒と、Pとは反対側の端Qに付けられた半径 a 、質量 M の円板からなる振り子がある。図のように x - y 平面をとり(紙面内)、それに垂直な方向を z 軸にとる。重力は x 軸の正の向きに働いている。剛体棒及び円板は共に x - y 平面内を運動し、さらに円板は点Qのまわりで自由に回転できるとする。図のように、剛体棒と x 軸のなす角を θ 、円板中心Oと点Qを結ぶ線と x 軸のなす角を ϕ とし、 θ 、 ϕ は図の矢印の向きを正とする。なお、剛体棒、円板それぞれの密度は一様とする。重力加速度の大きさを g とする。



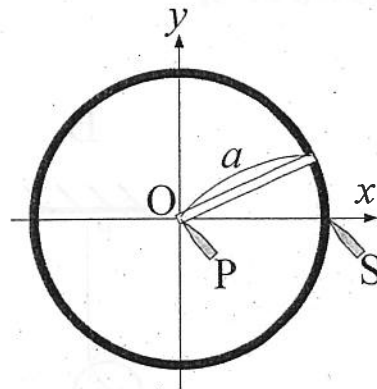
- (1) 点Pを通り z 方向に沿った軸まわりの剛体棒の慣性モーメントを I_ℓ 、点Oを通り z 方向に沿った軸まわりの円板の慣性モーメントを I_a とする。 I_ℓ 及び I_a を $\{l, a, m, M\}$ を用いて表せ。解答欄には答のみを記入すること。
- (2) 振り子全体のポテンシャルエネルギー V を $\{l, a, m, M, g, \theta, \phi\}$ を用いて表せ。ただし、 V は、剛体棒と円板が真下($\theta = \phi = 0$)に吊るされているときを基準($V = 0$)とする。解答欄には答のみを記入すること。
- (3) 振り子全体の運動エネルギー T を $\{l, a, m, M, \theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}\}$ を用いて表せ。ここで、 $\dot{\theta}$ と $\dot{\phi}$ は、それぞれ θ と ϕ の時間微分である。

- (4) 以下では、微小振動を考える。即ち、 θ , ϕ 及び $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ を微小量とみなし、ラグランジアンを微小量の二次までで近似する。この近似のもとでの θ, ϕ に対するオイラー・ラグランジュ方程式をそれぞれ導け。
- (5) 問(4)で導いたオイラー・ラグランジュ方程式の解として現れる二種類の基準振動の角振動数を ω_+ , ω_- とする ($\omega_+ > \omega_-$)。剛体棒の質量が円板のそれに比べて無視できる極限 $m/M \rightarrow 0$ での ω_+^2 , ω_-^2 をそれぞれ求めよ。
- (6) 問(5)の状況でさらに剛体棒が円板の半径よりも十分長い場合 ($l \gg a$) を考える。それぞれの基準振動の特徴をとらえた模式図として最も適切なものを下図の A~F から選び、解答欄に記号を記入せよ。なお、それぞれの図では振動の最大振幅時の線分 PQ, OQ が示されており、灰色の線は半周期後の状態を表わしている。



2

図のように、導体でできた半径 a の円形レールを中心が原点 O 上にあるように xy 平面上に固定し、その上に長さ a の導体でできた棒を片方の端が原点上にあるように置く。棒は原点上の端点を中心として、もう片方の端点が常にレール上にあるように摩擦なく回転できるものとする。原点には棒に接触する端子 P が、また点 $(a, 0)$ にはレールに接触する端子 S がそれぞれ置かれている。棒の単位長さあたりの質量は λ であるとする。棒と端子 P 、レールと端子 S 、および棒の端点とレールはそれぞれ常に接触しているが、その接触抵抗は無視できるものとする。また、レールの電気抵抗、および棒とレールのインダクタンス、棒が回転する際に受ける空気抵抗はいずれも無視できるものとし、レールや棒は変形しないものとする。(1)~(4)では、解答欄に答のみを記入すること。



[A] 系全体に磁束密度の大きさが B_0 の紙面の裏から表へ向かう均一な静磁場をかけた場合を考える。棒の初角速度が 0 の状態で、端子 P 側が負極、端子 S 側が正極となるように一定の電圧 V の直流電源を端子 P 、 S につないだところ、棒は回転を始めた。棒の電気抵抗を R として、次の各問に答えよ。

- (1) レールから棒へと流れる電流の大きさが I であるとき、棒の単位長さあたりに働く力の大きさを求めよ。
- (2) レールから棒へと流れる電流の大きさが I であるとき、棒全体が受ける力のモーメントの大きさを求めよ。
- (3) 棒が角速度 ω で反時計回りに回転しているとき、棒全体に生じる誘導起電力の大きさを求めよ。
- (4) 棒が角速度 ω で反時計回りに回転しているとき、棒に流れる電流を求めよ。ただし、レールから棒に流れる電流の向きを正とする。
- (5) 電源を端子 P 、 S につないでから充分長い時間経過すると、棒の角速度は一定値に近づいた。この角速度の大きさを求めよ。

[B] 端子 P, S に電源ではなく電気容量 C のコンデンサをつないだ場合を考える。次の各問に答えよ。

- (6) 系全体に磁束密度の大きさが B_0 の紙面の裏から表へ向かう均一な静磁場をかけた場合を考える。棒のレール上の端点が点 $(a, 0)$ にあり、静止している状態で、コンデンサの P 側の極板に $-Q_0$ の負電荷を、また S 側の極板に $+Q_0$ の正電荷をそれぞれ同時に与えたところ、棒が回転し始め、やがて充分長い時間経過した後の棒の角速度は一定値に近づいた。この過程に関する次の文章において、空欄 (ア) ~ (ウ) に当てはまる数式を答えよ。ただし、棒の電気抵抗は R とする。

棒の回転の運動方程式より、任意の時刻において、棒の角速度 $\omega(t)$ (反時計回りを正とする) とコンデンサの S 側の極板に蓄えられた電荷 $Q(t)$ を含む保存量 $\omega(t) + \text{〔ア〕} Q(t)$ が存在する。一方、棒が回転し始めて充分長い時間が経過した後では、棒の角速度 ω_∞ とコンデンサの S 側の極板に蓄えられた電荷 Q_∞ との間に $Q_\infty = \text{〔イ〕}$ の関係が成り立つ。これらより、 ω_∞ は 〔ウ〕 と表される。

- (7) 系全体に磁束密度が $B(t) = B_1 \sin \omega_1 t$ (紙面の裏から表へ向かう磁場の向きを正とする) である均一な磁場をかけた場合を考える。棒の角速度 $\omega(t)$ に対する微分方程式を立てることで、任意の時刻 $t > 0$ での棒の角速度 (反時計回りを正とする) を求めよ。ただし、 $t = 0$ での棒の角速度は ω_0 とし、 $t = 0$ でコンデンサには電荷が蓄えられていないものとする。また、棒の電気抵抗は無視できるものとする。

3

[A] (1) $r = (x, y)$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ とするとき, $\ln|r|$ の勾配

$$\nabla \ln|r|$$

を求めよ。ただし, \ln は自然対数関数である。

(2) ラプラシアン

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla$$

を 2次元極座標 (r, θ) を用いて表せ。

(3) $|r| \neq 0$ において,

$$\Delta \ln|r|$$

を求めよ。

(4) 積分範囲を $|r| \leq a$ (a は正の定数) として, 面積分

$$I = \iint \Delta \ln|r| dx dy$$

を求めよ。ただし, xy 平面内の閉曲線 C に囲まれた領域 S 上で定義された関数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ の積分について成り立つ 2次元のグリーンの定理

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

を用いてよい。

(5) 前問 (3), (4) の結果から, $|r| = 0$ を含む任意の r に対して成り立つ

$$\Delta \ln|r|$$

の表式を求めよ。ただし, 解答欄には答のみを記入すること。

[B] (6) 積分

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{p^2 - k^2 - i\delta} dp$$

を求めよ。ただし, x は実数, k は正の実数, δ は正の無限小とする。

(このページは落丁ではありません。)

筆答専門試験科目（午後）

31 大修

物理学系

時間 13:30-15:30

物理学（午後）

受 験 番 号

注意事項

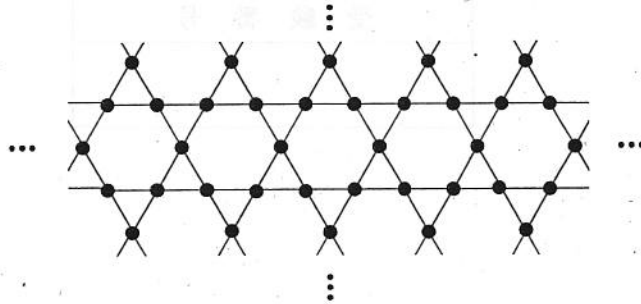
1. 次ページ以降の3題すべてに解答せよ。
2. 答案用紙は3枚である。
3. 解答は1題ごとに該当する答案用紙に記入せよ。
4. 各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ。
5. 答案用紙は、解答を記入してないものも含めてすべて提出せよ。
6. 問題冊子および計算用紙の第1ページに受験番号を記入せよ。
7. 問題冊子および計算用紙は回収するので持ち帰らないこと。

1

下図の全格子点数 N の 2次元かごめ格子を考える (N は充分大きいとする)。図の黒丸は格子点を表しており、格子点上にスピンを配置する。この格子に関して、Ising 模型を考察することにする。ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle j,k \rangle} \sigma_j \sigma_k - H \sum_j \sigma_j, \quad J > 0$$

で表される。ただし J は最近接格子点のスピンの相互作用によるエネルギー (交換相互作用エネルギー)、 H は外部磁場、 σ_j は格子点 j 上のスピんで ± 1 の値をとる。さらに上記の $\sum_{\langle j,k \rangle}$ は最近接格子点の組 (図の実線) に関する和を表している。以下ではこのハミルトニアンを平均場近似で扱う。



- (1) スピンの平均値を $\langle \sigma_j \rangle = m$ とする。 $\sigma_j = m + (\sigma_j - m)$ とし、平均値からのずれ $(\sigma_1 - m), (\sigma_2 - m), \dots, (\sigma_N - m)$ の 2 次の項を無視すると、次式で表される 2次元かごめ格子における平均場近似でのハミルトニアン \mathcal{H}_{MF} が導かれる。 を J, N, m を用いた式で埋めよ。

$$\mathcal{H}_{MF} = \text{} - \sum_j \sigma_j (\text{} + H)$$

- (2) 分配関数 Z_{MF} と自由エネルギー \mathcal{F}_{MF} を m の関数として求めよ。ボルツマン定数 k_B と温度 T を用いよ。解答欄には答のみを書くこと。
- (3) 平均場近似でのハミルトニアン \mathcal{H}_{MF} のもとでの系の全スピンの期待値 $\langle \sum_j \sigma_j \rangle_{MF}$ が Nm と等しいとおくことによって、 m が満たすべき方程式を導け。
- (4) (3) の方程式は、外部磁場 $H = 0$ のとき、ある温度 T_C を境に $T < T_C$ で $m \neq 0$ の解を持つ。この温度 T_C を求めよ。

- (5) 外部磁場 $H = 0$ において $T \rightarrow T_C - 0$ (T_C より低い温度で T_C に近づく) のとき, $m \neq 0$ の解の温度依存性は $|m| \propto (T_C - T)^\beta$ と近似される。 β を求めよ。必要であれば, $x \approx 0$ のとき, $\tanh x \approx x - \frac{1}{3}x^3$ であることを用いてよい。
- (6) $T \rightarrow T_C + 0$ (T_C より高い温度で T_C に近づく) のとき, 1 スピンあたりの帯磁率 $\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial H} \right|_{H=0}$ の温度依存性は $\chi \propto (T - T_C)^\gamma$ と近似される。 γ を求めよ。

2

3次元等方調和振動子ポテンシャル中を運動する質量 μ の量子力学的粒子を考える。系のハミルトニアン \hat{H} は極座標で

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2}$$

と書ける。ここで、 \hbar をプランク定数として $\hbar = h/(2\pi)$ 、 ω は正の定数で、 \hat{L} は角運動量演算子である。定常状態の波動関数を $\psi(r, \theta, \phi)$ とし、そのエネルギー E とする。角運動量の量子化の軸を z 方向にとり、方位量子数を ℓ 、磁気量子数を m とし、波動関数 $\psi(r, \theta, \phi)$ を、球面調和関数 $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ を用いて、

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{\chi_\ell(r)}{r} Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

と変数分離をする。必要なら、以下のガウス積分の公式を用いよ。

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ただし、 $a > 0$ 、 $n = 1, 2, \dots$ 、 $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)$ である。

- (1) $\alpha = \frac{\mu\omega}{\hbar}$ 、 $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$ とおき、 $\chi_\ell(r)$ の満たすべき微分方程式を求めよ。

解答欄には答のみを記入すること。

- (2) $r \rightarrow 0$ と $r \rightarrow \infty$ における漸近解を分離するため、 $\chi_\ell(r) = r^{\ell+1} e^{-\alpha r^2/2} u_\ell(\rho)$ ($\rho = r^2$) と書くと、 u_ℓ に対する微分方程式は

$$\rho \frac{d^2 u_\ell}{d\rho^2} + \left(\ell + \frac{3}{2} - \alpha\rho \right) \frac{du_\ell}{d\rho} + \frac{1}{4} (k^2 - \alpha(2\ell + 3)) u_\ell = 0$$

となる。 $u_\ell(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ と級数展開し、微分方程式を解くと、 a_n に対する漸化式

$$a_{n+1} = -\frac{\frac{1}{4}(k^2 - \alpha(2\ell + 4n + 3))}{(n+1)(n + \ell + \frac{3}{2})} a_n$$

を得る。 $r \rightarrow \infty$ における境界条件 $\chi_\ell \rightarrow 0$ より、エネルギー E を求めよ。解答欄には答のみを記入すること。

- (3) 第一励起状態と第二励起状態について、エネルギーの縮退度を答えよ。解答欄には答のみを記入すること。

- (4) β を実定数として、この系に

$$\hat{V} = \beta \alpha^2 r^4$$

の摂動を加えた。この摂動による基底状態のエネルギーのずれ ΔE を β の 1 次までで求めよ。規格化された基底状態の波動関数は

$$\psi_{\text{g.s.}}(r, \theta, \phi) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} r^2\right)$$

で与えられる。

- (5) 運動量演算子は並進操作の生成子となっていることから、基底状態 $\psi_{\text{g.s.}}$ を z 方向正の向きに微小距離 ϵ だけ移動させた状態は、

$$\Psi = \left(1 - i\frac{\epsilon}{\hbar}\hat{p}_z\right)\psi_{\text{g.s.}}$$

と表すことができる。ここで、 \hat{p}_z は z 方向の運動量演算子である。以下、 ϵ の 1 次までで考える。

- (a) 状態 Ψ は基底状態 $\psi_{\text{g.s.}}$ と $\ell = 1$ の状態のうち一つ $\psi_{\ell=1}^m$ との重ね合わせで書ける。次の空欄 (ア)(イ)(ウ) に入る適切な式または数値を解答欄に記入せよ。

$$\Psi = \boxed{\text{(ア)}} \psi_{\text{g.s.}} + \boxed{\text{(イ)}} \psi_{\ell=1}^{m=\boxed{\text{(ウ)}}$$

ただし、 $\ell = 1$ の状態の波動関数は、

$$\psi_{\ell=1}^m(r, \theta, \phi) = \frac{\chi_1(r)}{r} Y_1^m(\theta, \phi)$$

で与えられ、

$$\chi_1(r) = \sqrt{\frac{8}{3}} \left(\frac{\alpha^5}{\pi}\right)^{1/4} r^2 e^{-\alpha r^2/2},$$

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi},$$

である。

- (b) 時刻 $t = 0$ で Ψ であった状態が、ハミルトニアン \hat{H} に従って時間発展をする。時刻 t ($t > 0$) の状態を $\Psi(t)$ と表したとき、

$$\langle z \rangle = (\Psi(t), z\Psi(t))$$

を t の関数として求めよ。ただし、 (Ψ, Φ) は、状態 Ψ と Φ の内積を表し、状態 Ψ と Φ の波動関数 $\psi(\vec{r})$, $\phi(\vec{r})$ を用いて、

$$(\Psi, \Phi) = \int \psi^*(\vec{r})\phi(\vec{r})d^3\vec{r}$$

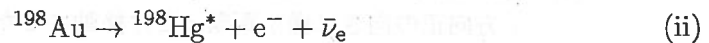
と計算できる。

3

- [A] 運動エネルギーが 0.025 eV 程度の中中性子は熱中性子と呼ばれる。熱中性子のフラックス（単位面積・単位時間あたりの通過量）を測定する一つの方法として、箔放射化法が挙げられる。熱中性子のビームを金箔に照射すると、中性子捕獲反応



によって、放射性同位体 ${}^{198}\text{Au}$ が作られる。 ${}^{198}\text{Au}$ は、 β 崩壊



によって ${}^{198}\text{Hg}$ の励起状態 ${}^{198}\text{Hg}^*$ に遷移する。ここで、 ${}^{198}\text{Au}$ の半減期（原子核の数が半分になるまでの時間） $T_{1/2}$ は約 2.7 日である。さらに、 ${}^{198}\text{Hg}^*$ は、即座に γ 崩壊



により基底状態へと遷移する。なお、反応 (i), (ii), (iii) 以外の反応は起こらないものとする。すなわち 1 個の中中性子が ${}^{197}\text{Au}$ に捕獲されると、反応 (iii) が必ず起こり、 γ 線が 1 本放出される。以下では、反応 (iii) における γ 線のみを取り扱い、反応 (i) における γ 線は考えない。

中性子捕獲反応の断面積は既知であるため、 ${}^{198}\text{Hg}$ の γ 崩壊に伴う γ 線を検出器によって計数することで、 ${}^{198}\text{Au}$ の生成量が評価される。それにより、熱中性子のフラックスを推定することができる。

- (1) 以下は、 ${}^{198}\text{Au}$ の β 崩壊 (ii) に伴って放出される β 線と、 ${}^{198}\text{Hg}$ の γ 崩壊 (iii) に伴って放出される γ 線のエネルギー分布の形状の違いについて述べたものである。空欄を埋めよ。

β 崩壊は電子と反電子ニュートリノを放出する 3 体崩壊であるため、 β 線のエネルギー分布は 。それに対し、 γ 崩壊は 2 体崩壊なので、 γ 線のエネルギー分布は 。

- (2) 箔放射化法における γ 線検出に用いる検出器として、プラスチックシンチレーション検出器と NaI (Tl) シンチレーション検出器のどちらが適しているかを理由とともに答えよ。ただし以下のキーワードから 2 つ以上を使用すること。

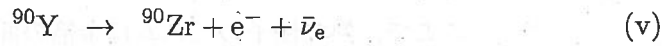
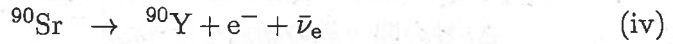
光電効果, コンプトン散乱, レイリー散乱, 電子対生成, 制動放射, 原子番号, 質量数, 分子数, 密度

- (3) T 秒間、フラックス Φ ($/\text{cm}^2/\text{s}$) の熱中性子のビームを面積 S (cm^2)、厚さ d (cm) の金箔の面に垂直に照射し、照射終了後 t 秒経過した時点から Δt 秒の間 γ 線の測定を行った。

ここで、熱中性子のビームは金箔の面よりも十分に広がっており、金箔の面においてフラックスは場所によらず一定とする。金箔は十分に薄く、金箔を通過する際の熱中性子のフラックスの減少は無視できるものとする。また、 $T, t, \Delta t$ はいずれも $T_{1/2}$ と比べて充分小さく、以下の間では、 $T, t, \Delta t$ の最低次以外の項は無視せよ。解答欄には答のみ記入せよ。

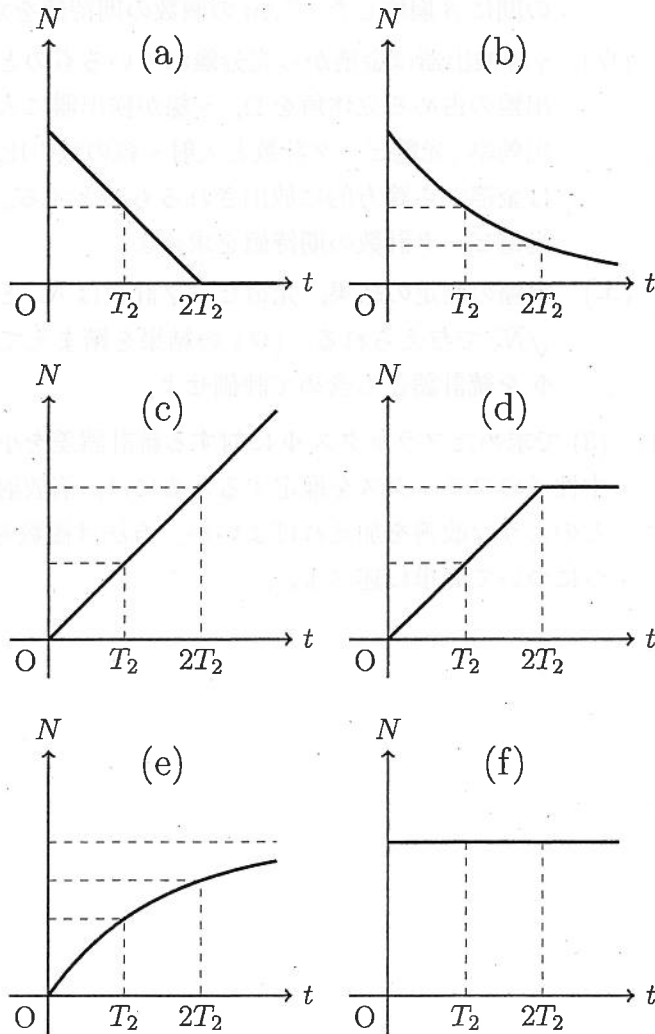
- (ア) 金箔の ^{197}Au 原子核の数密度を N_{Au} ($/\text{cm}^3$)、中性子捕獲反応の断面積を σ (cm^2) とすると、1 個の中性子が金箔中で反応する確率は、 $N_{\text{Au}}\sigma d$ となる。照射が終わった直後の ^{198}Au の個数の期待値を、 Φ を用いて表せ。
- (イ) (ア) の結果を踏まえて、照射が終わって t 秒経過した時点から Δt 秒の間に β 崩壊した ^{198}Au の個数の期待値を求めよ。
- (ウ) γ 線検出器は金箔から充分離れているものとし、金箔から見た γ 線検出器の占める立体角を Ω 、 γ 線が検出器に入射した時の光電ピーク検出効率 (光電ピーク計数と入射 γ 線の数の比) を ϵ とする。また、 γ 線は金箔から等方的に放出されるものとする。(イ) の結果を踏まえて、光電ピーク計数の期待値を求めよ。
- (エ) 実際の測定の結果、光電ピーク計数は N_γ となった。その標準誤差は $\sqrt{N_\gamma}$ で与えられる。(ウ) の結果を踏まえて、熱中性子のフラックス Φ を統計誤差も含めて評価せよ。
- (4) (3) で求めたフラックス Φ に対する統計誤差を小さくし、より精度よく熱中性子のフラックスを推定するためには、箔放射化法による測定においてどのような改善を加えればよいか。方法は複数考えられるが、そのうち 1 つについて簡単に述べよ。

[B] 次に、 β 線源として広く用いられている ^{90}Sr について考える。 ^{90}Sr は、

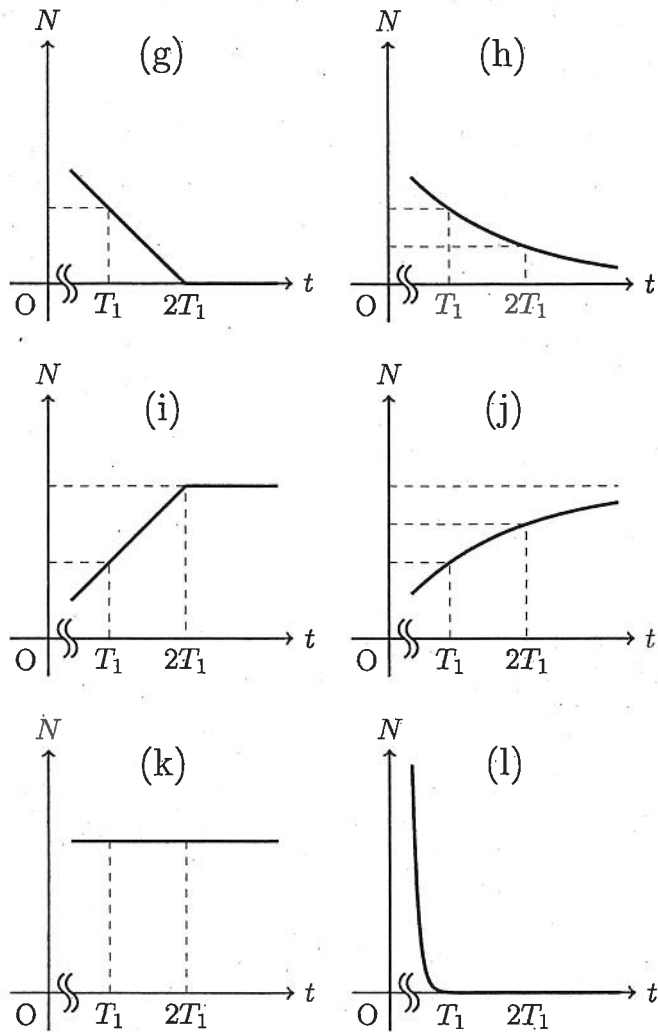


と、2回の放射性崩壊を起こす。 ^{90}Sr と ^{90}Y の半減期をそれぞれ T_1, T_2 とすると、 $T_1 = 29$ 年、 $T_2 = 65$ 時間であり、 $T_1 \gg T_2$ を満たしている。なお、崩壊(iv), (v)以外の反応は起こらないものとする。

- (5) 時刻 t における ^{90}Sr , ^{90}Y , ^{90}Zr の原子核の個数をそれぞれ $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ と表す。 $t = 0$ において、 $N_2(0) = N_3(0) = 0$ とする。このとき、 t が0から $2T_2$ 程度までの範囲における $N_1(t)$, $N_2(t)$ の時間依存性を表す図として最も適切なものを(a)~(f)からそれぞれ1つずつ選べ。ただし、同じ選択肢を複数回選んでもよい。



- (6) 同様に, T_1 程度の時間が経過した後の $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ の時間依存性を表す図として最も適切なものを (g)~(l) からそれぞれ1つずつ選べ。ただし, 同じ選択肢を複数回選んでもよい。



(注) (l) は $2^{-t/T_2}$ に比例して減衰する様子を表す。

