平成 29 年 4 月入学及び平成 28 年 9 月入学
大学院修士課程・専門職学位課程入学試験

理学院　物理学系
筆答専門試験科目
想　定　問　題

平成 28 年 1 月

東京工業大学

※　出題される分野、問題数等本想定問題の内容は、実際の試験問題とは異なる場合があります。

※　各系の試験概要については，２月上旬に公表予定です。

※　本入学試験にかかる募集要項は，４月上旬に本学ホームページで公表し，志願票等を含む冊子を５月上旬より配布する予定です。

専門科目（午前）

時間　午前　9：30－11：30

物理学（午前）

受験番号

注意事項

1．次ページ以降の3題すべてに解答せよ．

2．答案用紙は3枚である．

3．解答は1題ごとに該当する答案用紙に記入せよ．

4．各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ．

5．答案用紙は，解答を記入していないものも含めてすべて提出せよ．

6．問題冊子，および計算用紙の第1ページに受験番号を記入せよ．

7．問題冊子，計算用紙は回収するので持ち帰らないこと．

1

図1のように，長さ 2ℓ で質量 M の一様な棒が平面上に置かれている．平面上には x 軸，y 軸がそれぞれ取られ，重心が原点に来るように y 軸上に棒が置かれている．棒の太さは無視できるものとする．質量 m の質点が x 軸に平行かつ正の向きに速さ v で飛んできて，$y = h$ で棒に完全弾性衝突した．図2のように，衝突直後，質点は x 軸に平行かつ負の向きに速さ v' で飛び，棒の重心は x 軸に平行かつ正の向きに速さ V で動き出した．衝突直後の棒の重心の周りの角速度を ω(時計回りを正) とする．以下の問に答えよ．ただし，摩擦や重力は無視できるものとする．

(1) 棒の重心を通って棒に垂直な軸の周りでの棒の慣性モーメント I を M と ℓ を用いて表せ．答のみで良い．

以下の (2), (3), (4) では必要ならば I を用いてもよい。

(2) 衝突前後の運動量保存を表す式を書き表せ．

(3) 衝突前後の角運動量保存を表す式を書き表せ．

(4) 衝突前後のエネルギー保存を表す式を書き表せ．

(5) V, v', ω をそれぞれ，M, m, v, ℓ, h の中から必要なものを用いて簡潔に表せ．

(6) 衝突直後，棒の重心から y 軸の負の向きに長さ h' の地点の棒の速さが 0 であった．h' を ℓ と h を用いて表せ．

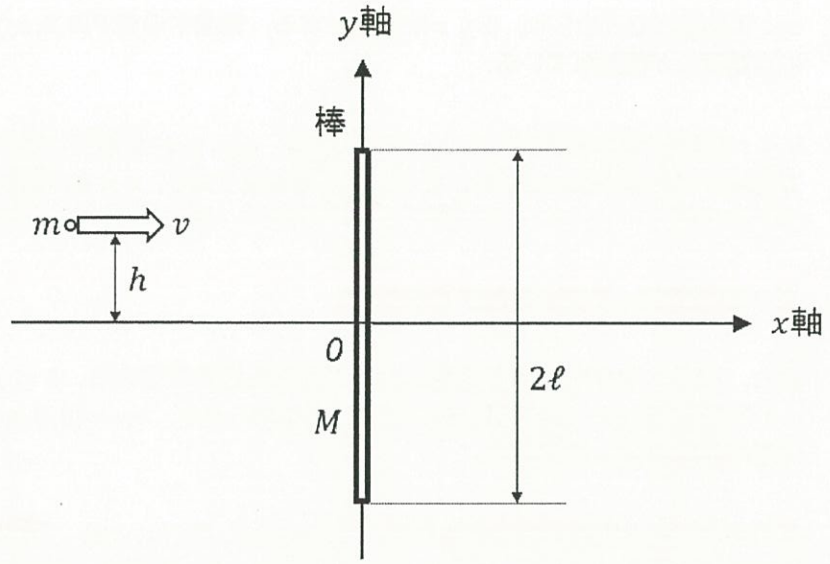


図 1: 衝突前の質点と棒

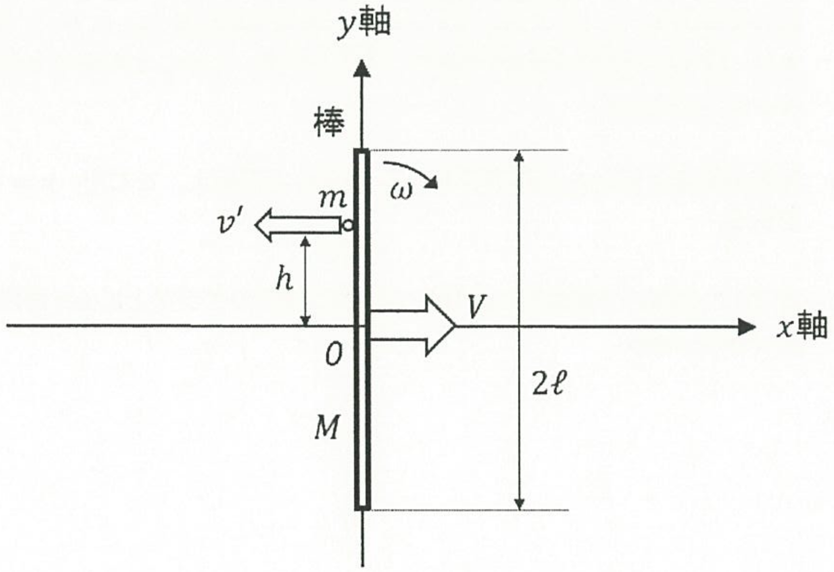


図 2: 衝突直後の質点と棒

$\boxed{2}$ 物質の表面近傍に点電荷が 1 つ置かれている．真空の誘電率を ε_0 として以下の問に答えよ．

［A］ $z < 0$ は導体で占められ，$0 \leq z$ は真空とする．真空中の点 $\mathrm{P}(0, 0, z_0)$ $(0 \leq z_0)$ に点電荷 q が置かれている．

(1) $0 \leq z$ の真空領域の電位を $\phi(x, y, z)$ と表す時，$\phi(x, y, z)$ が真空と導体の境界面で満たすべき境界条件を示せ．さらに，導体を取り去り，$z < 0$ の領域に適当な点電荷を置くことによりこの境界条件を満たすことができることを証明せよ．

(2) 点 P の点電荷 q が受ける力 $\boldsymbol{F}$ を求めよ．

［B］ 次に，［A］における導体を誘電体に置き換えた場合を考える．$0 \leq z$ を真空，$z < 0$ を誘電率 $\varepsilon(> \varepsilon_0)$ の誘電体として，真空中の点 P，$\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, z_0)(0 < z_0)$ に正の点電荷 $q(> 0)$ を置く．

(3) 真空中の電場と電束密度をそれぞれ，$\boldsymbol{E}_V(x, y, z)$, $\boldsymbol{D}_V(x, y, z)$，誘電体中の電場と電束密度をそれぞれ，$\boldsymbol{E}_D(x, y, z)$, $\boldsymbol{D}_D(x, y, z)$ とする時，真空と誘電体の境界面における電場と電束密度の境界条件を示せ．

(4) 全領域を真空として点 P の点電荷 q が，位置 $\boldsymbol{r}$ に作る電場を $\boldsymbol{E}_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3}$，点 P の $z = 0$ に関する鏡面対称点 Q の点電荷 q' が作る電場を $\boldsymbol{E}_2 = \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0|^3}$，また，全領域を誘電率 ε の誘電体として点 P の点電荷 q'' が作る電場を $\boldsymbol{E}_3 = \dfrac{q''}{4\pi\varepsilon}\dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3}$ として，適当な q', q'' を選べば，$0 \leq z$ の真空中の電場を $\boldsymbol{E}_V = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$，$z < 0$ の誘電体中の電場を $\boldsymbol{E}_D = \boldsymbol{E}_3$ とすることにより，問 (3) の境界条件を満たすことができる．このことを示すと共に，その時の q', q'' を示せ．

(5) 誘電体表面に現れる分極電荷の面密度 $\sigma(r)$ を求めよ．ここで，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ である．

(6) 問 (5) の表面の分極電荷に留意して，答案用紙のグラフ上に x-z 面内の電気力線の概形を描け．

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ．

[A]

(1) 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x^2+1}dx \quad (-1 < a < 1)$$

[B]

(2) 次の微分方程式の実関数 $y(x)$ の一般解 $y_1(x)$ を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} + y = 0$$

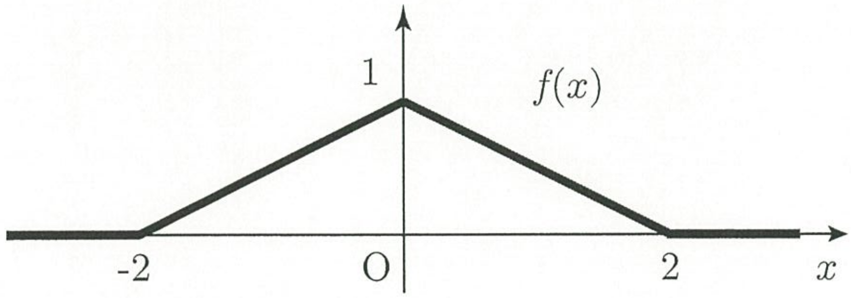
(3) 次の微分方程式の実関数 $y(x)$ の一般解 $y_2(x)$ を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} + y = \cos x$$

[C]

(4) 下図に示す関数 $f(x)$ のフーリエ変換を利用し，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$



専門科目（午後）

時間　午後１：３０－３：３０

物 理 学 (午後)

受 験 番 号

注意事項

1．次ページ以降の３題すべてに解答せよ．

2．答案用紙は３枚である．

3．解答は１題ごとに該当する答案用紙に記入せよ．

4．各答案用紙には必ず受験番号を記入せよ．

5．答案用紙は，解答を記入していないものも含めてすべて提出せよ．

6．問題冊子，および計算用紙の第１ページに受験番号を記入せよ．

7．問題冊子，計算用紙は回収するので持ち帰らないこと．

$\boxed{1}$

2次元調和振動子ハミルトニアン（簡単のため $m = \omega = 1$ となる単位系をとる）

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

のもとで運動する粒子を考える．ここで，(x, y) は粒子の座標，(p_x, p_y) は共役運動量を表す．

(1) 波動関数

$$\psi_1(x,y) = N\,x\,e^{-x^2/(2\hbar)}\,e^{-y^2/(2\hbar)}$$
$$\psi_2(x,y) = N\,y\,e^{-x^2/(2\hbar)}\,e^{-y^2/(2\hbar)}$$

で表される2個の状態はいずれもハミルトニアン演算子 $\hat{H}_0$ の固有状態である．それぞれの状態の固有値を求めよ．ただし，$N = \sqrt{2}/(\sqrt{\pi}\hbar)$ は規格化定数である．

以下では，この ψ_1, ψ_2 を基底ベクトルとする線型空間を考える．基底ベクトルを

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表記する．

(2) 角運動量演算子 $\hat{L} \equiv xp_y - yp_x$ をこの線型空間に作用する行列 L で表せ．

(3) 行列 L の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(4) $\hat{H}_0$ に外場（たとえば磁場など）による相互作用が加わったハミルトニアン演算子

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + g\hat{L} \qquad (g \text{ は定数})$$

を，この線形空間に作用する行列で表せ．

(5) t を時間変数とするとき、演算子 $\exp\left(-ig\hat{L}\frac{t}{\hbar}\right)$ を，この線形空間に作用する行列で表せ．

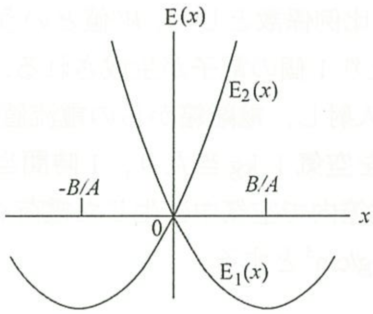
(6) 時刻 $t = 0$ で $|\psi(0)\rangle = |\psi_1\rangle$ 状態にあった粒子が，その後ハミルトニアン $\hat{H}$ のもとで運動するとき，時刻 $t\ (> 0)$ での状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ を求めよ．

$\boxed{2}$

E_1 または E_2 のいずれかのエネルギー準位を取る，N 個の原子からなる固体結晶を考える．この系に結晶全体としての一様な変形 x が与えられたとき、各原子のエネルギーは，変形 x に依存して次のように変化する．

$$E_1(x) = \frac{1}{2}Ax^2 - Bx, \qquad E_2(x) = \frac{1}{2}Ax^2 + Bx.$$

ここで A，B は正の定数である．また，参考のために $E_1(x)$ と $E_2(x)$ を下に図示してある．



外力の働かない状態で高温極限から温度を下げていったときに，この系はある温度 T_c で変形のない状態から自発的に一様な変形が発現する状態へ相転移する．この問題を以下の問いに従って考察せよ．ただしボルツマン定数を k_{B} とする．

(1) この系を N 個の独立な 2 準位系として取り扱うこととし，温度 T のもとで変形 x の関数として，この系の分配関数 $Z(T,x)$ を求めよ．

(2) $F(T,x) = -k_{\mathrm{B}}T\ln Z(T,x)$ で与えられるこの系の自由エネルギーから，温度 T における結晶の変形の熱平衡値 $\langle x\rangle$ が得られる．その $\langle x\rangle$ を求める方程式を

$$AN\langle x\rangle - \boxed{\quad（ア）\quad} = 0$$

と書き表したとき，$\boxed{（ア）}$ の中に入る式を与えよ．

(3) 温度 T_c を境として，自由エネルギー $F(T,x)$ が x の関数として，$T > T_c$ では $x=0$ において下に凸，$T < T_c$ では上に凸になっていることを，T_c の値とともに示せ．同時に $T > T_c$ では $\langle x\rangle = 0$ のみが (2) の方程式の解であること，および $T < T_c$ では $\langle x\rangle = 0$ 以外の解が 2 つ存在することを示せ．

(4) T_c 近傍の低温側（$T < T_c$）における $\langle x\rangle$ の温度依存性を与えよ．ここでは簡単のために $x \geq 0$ とする．また、$|x| \ll 1$ のとき $\tanh x \sim x - \dfrac{1}{3}x^3$ の近似を利用してよい．さらに、$T=0$ のときの $\langle x\rangle$ を求めよ．

3

放射線が空気に入射すると，放射線と空気の分子との相互作用により放射線のエネルギーの一部が空気に吸収される．そのエネルギーを計測したい．空気にエネルギーが吸収される過程において，ある割合で空気が電離してイオンと電子の対ができる．そこで図１で示すような構造の計測器を作った．外側電極と中心電極の間に数百ボルトの電圧をかけて，生じたイオンを外側電極に，電子を中心電極に集めるようにする．空気に吸収されたエネルギーとイオン対の数には比例関係があるので，そのときの電流を測ることにより，その空気に吸収されたエネルギーを求めることができる．このような計測器のことを電離箱と呼ぶ．

この電離箱について以下の問いに答えよ．

(1) 上記の比例関係を表す比例係数として、W 値という定数を用いる．　平均吸収エネルギーW [eV/ionpair] 当たり１個の電子が生成される．空気の W 値は 34 eV/ionpair である．放射線が定常的に入射し，電離箱からの電流値が 1 fA (= 10^{-15} A) であるとき，吸収されるエネルギーを空気 1 kg 当たり，1 時間当たりに換算して，J/kg/h を単位として求めよ．ただし電離箱内で空気中に生じた電荷が集められる部分の体積を 100 cm^3，空気の密度を 1.3×10^{-3} g/cm^3 とする．

(2) この電離箱を動作させるためには，電源と電流計が必要である．そこで図２のような電池を直列につないだ電源と，オペアンプを利用した電流計とを用意した．これらを電離箱およびアースと接続せよ．

(3) 電圧計にかかる出力電圧は 1 fA に対して 0.1 mV 得たい．オペアンプに接続する抵抗は何Ωにすればよいか．

(4) 中心電極の付け根にはガードリングと呼ばれる電極が絶縁体にはさまれて設置され，アースに接続されている．このガードリングは電流を正確に測るために重要な役割を担っているが，その役割とは何か．

(5) W 値は最外殻電子のイオン化エネルギーに比べて２倍ほど大きい．それは内殻電子を電離することにもよるが，それよりも主要な作用が電離作用以外にもある．その作用は何か．

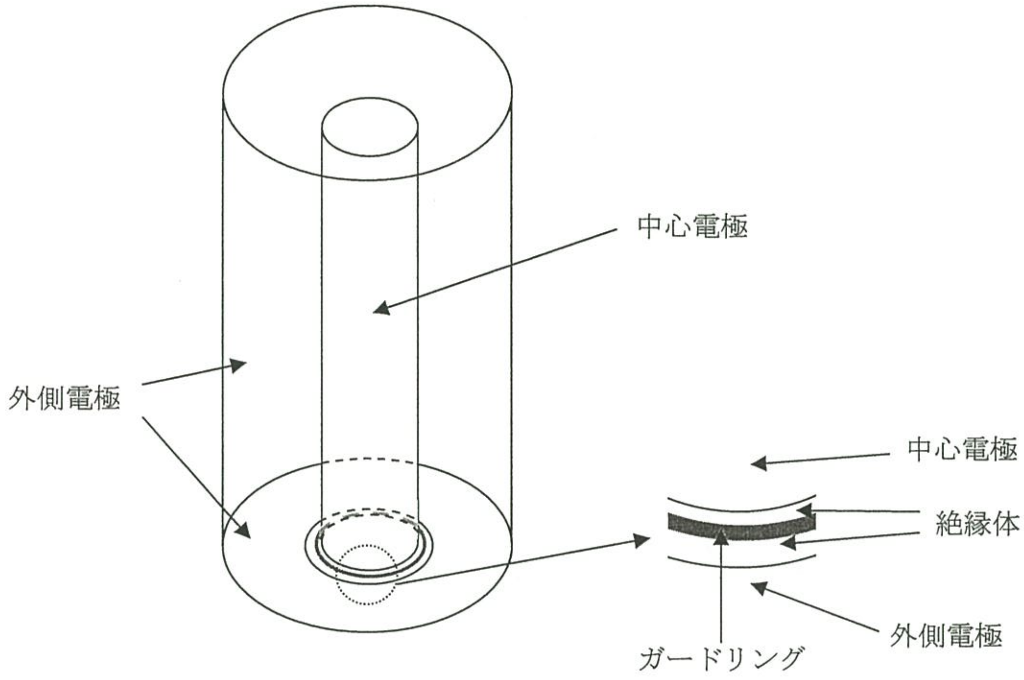

中心電極
外側電極
中心電極
絶縁体
外側電極
ガードリング

図１

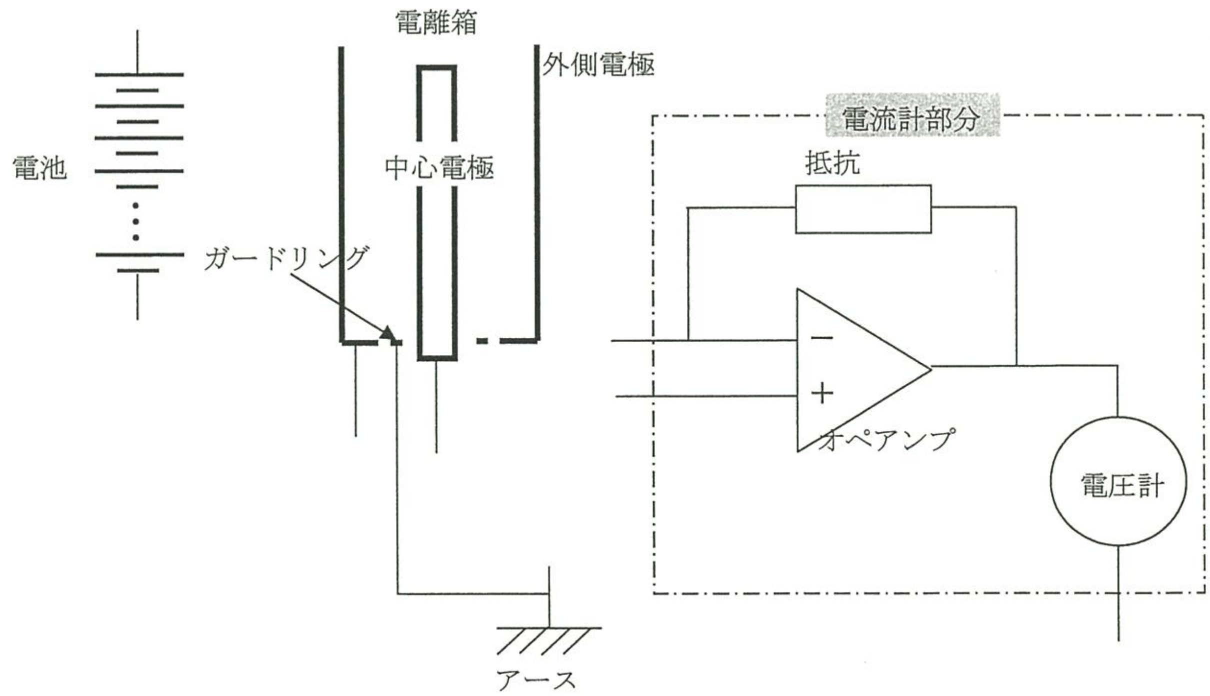

電離箱
外側電極
電池
中心電極
ガードリング
電流計部分
抵抗
−
+
オペアンプ
電圧計
アース

図２