

平成 29 年 4 月入学及び平成 28 年 9 月入学
大学院修士課程・専門職学位課程入学試験

工学院 機械系・システム制御系

筆答専門試験科目

想 定 問 題

平成 28 年 1 月

東京工業大学

- ※ 出題される分野、問題数等本想定問題の内容は、実際の試験問題とは異なる場合があります。
- ※ 各系の試験概要については、2月上旬に公表予定です。
- ※ 本入学試験にかかる募集要項は、4月上旬に本学ホームページで公表し、志願票等を含む冊子を5月上旬より配布する予定です。

平成 29 年 4 月入学および平成 28 年 9 月入学 修士課程入学試験
機械・システム制御系 想定問題

専 門 科 目

(午前：数学 (必須))

時間 9:30~10:30

機械系・システム制御系

注意事項

1. 問題 1 から問題 3 の全てに解答しなさい。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 解答は、必ず問題毎に別々の解答用紙に記入しなさい。
各問題の解答は裏面も使用できますが、1 枚に収めること。
4. 各解答用紙には、必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。
問題番号は試験科目名欄に書きなさい。
氏名を書いてはいけません。

問題 1

(1) 留数定理を用いて実関数の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$ の値を求めよ。

(2) 常微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ を考える。

初期条件を $t = 0$ の時 $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = 0$ として, 関数 $x(t)$ を求めよ。

問題 2

(1) xy 平面上のサイクロイド $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ が x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。 a は正の定数とする。

(2) 行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, ベクトル $\mathbf{z}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ に対して, 漸化式 $\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{z}_n$,

($n = 0, 1, 2, \dots$)を考える。

(i) 行列 \mathbf{A} の固有値 λ_1, λ_2 と, 対応する固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を求めよ。

(ii) ベクトル \mathbf{z}_n を固有ベクトル \mathbf{u}_1 と \mathbf{u}_2 により $\mathbf{z}_n = c_n \mathbf{u}_1 + d_n \mathbf{u}_2$ と表す。ここで c_n と

d_n は係数である。このとき, c_{n+1} と d_{n+1} を c_n と d_n を用いて表せ。

(iii) $\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき, \mathbf{z}_n を求めよ。

問題 3

3次元直交座標系 $O-xyz$ における 6 点 O, A, B, C, D, E の座標 (x, y, z) をそれぞれ, $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)$ とし, これら 6 点を頂点とする三角柱を考える。三角柱の表面を S とし, S で囲まれた空間領域を V とする。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル関数 $\mathbf{u} = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ を定義する。このとき, $\nabla \cdot \mathbf{u}$ を x, y, z を用いて表せ。なお $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は x, y, z 軸方向の単位ベクトルであり, ∇ は $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ と定義される。

(2) V についての体積積分 $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV$ を求めよ。

(3) S 上の外向き単位法線ベクトルを \mathbf{n} とする。面 $OACE, OBDE, ABO, CDE, ABDC$ をそれぞれ S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 とするとき, S_1, S_2, S_3, S_4 についての面積分は,

$$\iint_{S_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_3} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad \iint_{S_4} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{6}$$

となる。 S_5 について, \mathbf{n} を求め, $\iint_{S_5} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ。

(4) (3)より $\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ。

平成 29 年 4 月入学および平成 28 年 9 月入学 修士課程入学試験
機械・システム制御系 想定問題

専 門 科 目

(午前：物理 (必須))

時間 10:50~11:50

機械系・システム制御系

注意事項

1. 問題 1 と問題 2 の両方に解答しなさい。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 解答は、必ず問題毎に別々の解答用紙に記入しなさい。
各問題の解答は裏面も使用できますが、1 枚に収めること。
4. 各解答用紙には、必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。
問題番号は試験科目名欄に書きなさい。
氏名を書いてはいけません。

問題 1

図 1 に示すように水平に固定された内径 R の円筒内面を、半径 r 、質量 m の円板が内面に沿ってすべることなく運動する。円板の質量中心の最下点での速さを V として、以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度の大きさを g とする。

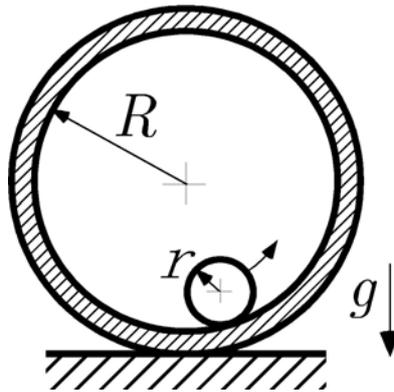


図 1

- (1) 円板の回転軸まわりの慣性モーメントを求めよ。
- (2) 最上点で円板が落下しないための、最上点での円板の質量中心の速さ v の条件を求めよ。
- (3) 上記(2)の場合の円板の最上点と最下点での力学的エネルギーを式で表し、両者の関係を示せ。
- (4) 最上点で円板が落下しないための、最下点での円板の速さ V の条件を求めよ。
- (5) 最下点での速さ V が(4)の条件を満たさずに、円板が最上点に到達する前に内面から離れる場合を考える。内面から円板が離れるときの図 2 に示す最下点からの角度 θ を求めよ。さらに、この状況を生じる最下点での速さ V の範囲を示せ。

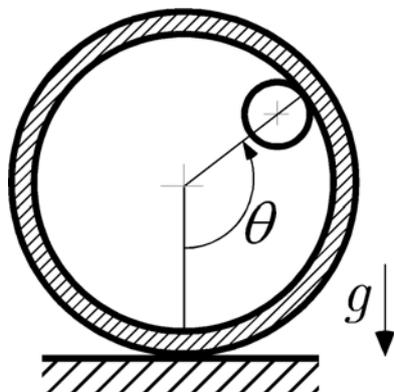


図 2

問題 2

図 3 に示すように、2つの車輪 R, L, 両車輪の中心をとる回転軸、および回転軸とつながれた3つの球 A, B, C からなる回転体がある。車輪、回転軸と棒は剛体であり、それらの質量は無視できるものとする。球 A, B, C は半径 r 、質量 m の均質な同一の球であり、それらの中心は直線上に並んでいる。球 B の中心は回転軸上で二つの車輪と等距離にある。原点 O が球 B の中心にあり、回転体に固定された動座標系を O- xyz とする。 x 軸は回転軸と一致し、球 A, B, C の中心が xz 平面内にあるように z 軸を定義する。また回転体に固定され、慣性主軸と座標軸が一致する動座標系を O- $\xi\eta\zeta$ とする。 ξ 軸の方向は3つの球を通る直線と一致し、 η 軸は y 軸と一致する。3つの球と車輪は x 軸に沿って等間隔 l に配置され、球 A と球 C の中心は回転軸から距離 h 離れている。車輪 R, L の半径は r_w ($r_w > h+r$) である。

- (1) 座標系 O- $\xi\eta\zeta$ に対する回転体の主慣性モーメント I_ξ, I_η, I_ζ を求めよ。ただし、球単体の中心軸まわりの慣性モーメントは $0.4mr^2$ である。
- (2) 座標系 O- xyz に対する回転体の慣性テンソルを求めよ。

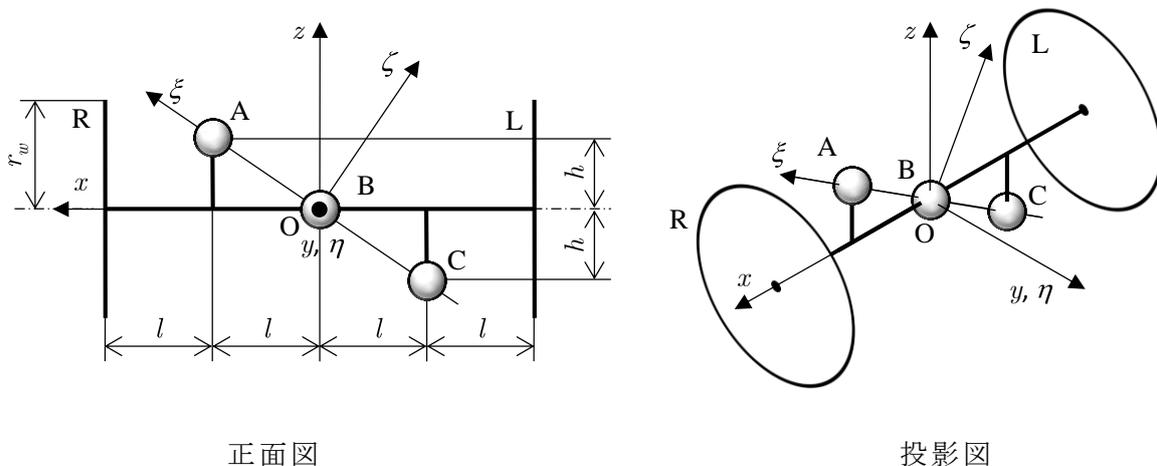


図 3

(次ページに続く)

(3) 回転体は図 4 に示すように一定並進速度 v で両車輪が水平面に接地してすべりがない状態で転がっている。以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度の大きさは g とし、ベクトルやテンソルは座標系 $O-xyz$ に対して表せ。

(i) 角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を求めよ。

(ii) 回転体の角運動量ベクトル \mathbf{L} を求めよ。ただし、慣性テンソル \mathbf{I} は

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

としてよい。

(iii) 回転運動により回転体に生じるモーメント \mathbf{N} を求めよ。ここで、回転体に生じるモーメントは角速度ベクトルと角運動量ベクトルの外積で表される。

(iv) 図 4 の状態 II のように z 軸が水平方向と一致したときの 2 つの車輪にかかる抗力 $\mathbf{R}_R, \mathbf{R}_L$ を求めよ。

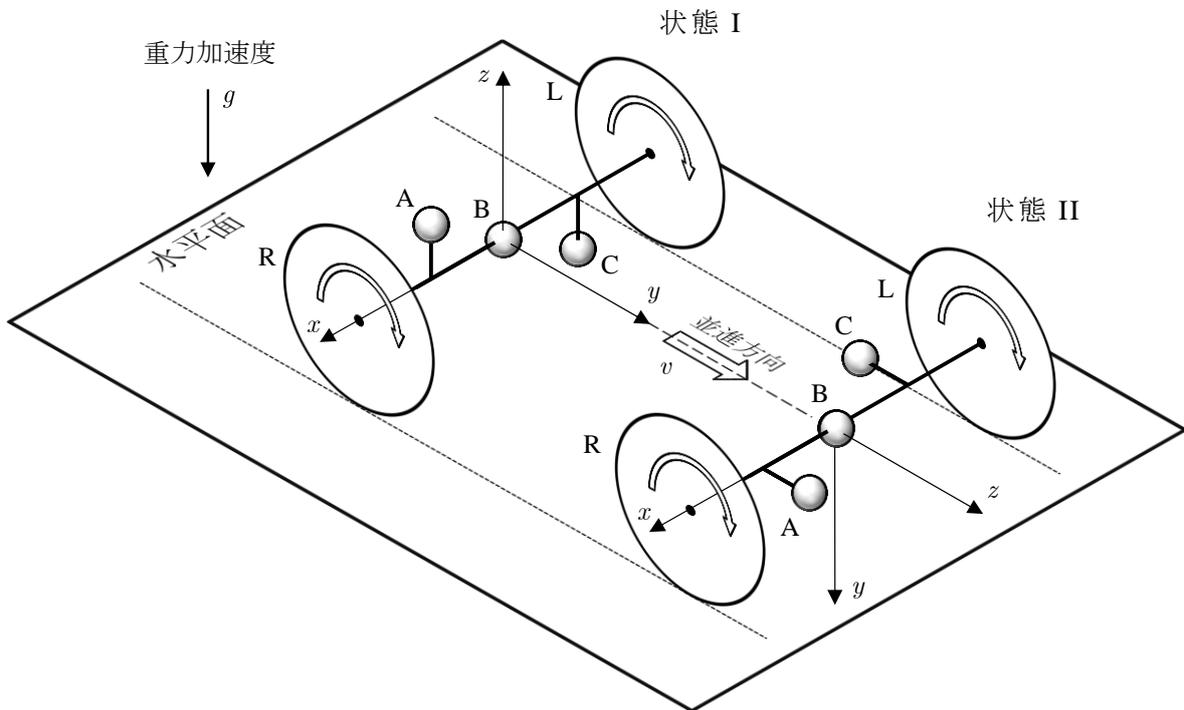


図 4

(問題 2 終わり)

平成 29 年 4 月入学および平成 28 年 9 月入学 修士課程入学試験
機械・システム制御系 想定問題

専 門 科 目

(午後：選択)

時間 13:30～16:30

機械系・システム制御系

注意事項

1. 問題 1 から問題 8 より 4 問を選択して解答しなさい。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 解答は、必ず問題毎に別々の解答用紙に記入しなさい。
各問題の解答は裏面も使用できますが、1 枚に収めること。
4. 各解答用紙には、必ず受験番号及び問題番号を記入しなさい。
問題番号は試験科目名欄に書きなさい。
氏名を書いてはいけません。

問題 1 (材料・加工)

問 1 図 1 に Al-Si 系の材料平衡状態図を模式的に示す。Si に対して Al は固溶体を形成しないと考えるよい。これについて以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 AC, 曲線 AB, C 点の名称をそれぞれ記せ。また α 相および Si の結晶構造の名称を記せ。
- (2) Si を 8 at% 含む融液をゆっくり冷却するとき, 融液が完全に無くなる直前における α 相と融液の比率 (原子数比) はいくらか。
- (3) Si を 8 at% 含む融液をゆっくり冷却するとき, 融液が完全に無くなり固体になった直後における α 相と Si の割合 (原子数比) はいくらか。
- (4) Si を 8 at% 含む融液をゆっくりと室温まで冷却した時, (i) 曲線 AC よりわずかに高い温度, (ii) 曲線 AC よりわずかに低い温度, (iii) 577°C よりわずかに高い温度, (iv) 577°C よりわずかに低い温度, (v) 室温における組織を図示せよ。なおその特徴がわかるように描くこと。

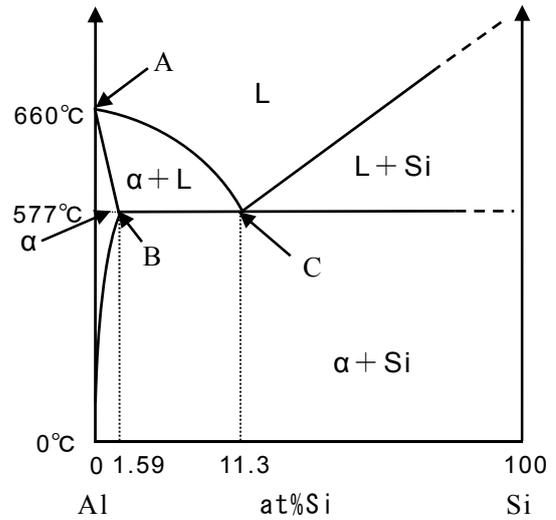


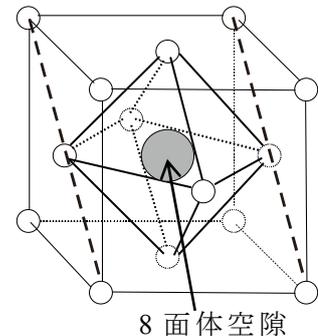
図 1

問 2 以下の空欄に当てはまる最適な語句を答えよ。

- (1) 3次元プリンターとは, コンピュータを用い, (①) で設計された 3次元形状数値データから直接立体形状を成形する装置であり, プラスチック等を (②) 方向に積層することを特徴としている。
- (2) テイラードブランク工法とは, 異種鋼板を突合せ (③) し, 1枚の板として (④) 加工用素材として用いるもので, 自動車の車体の (⑤) ・高強度化などに有効である。
- (3) 旋削機能とミーリング機能を持つ (⑥) は複雑形状部品製造の工程集約に効果的な工作機械である。
- (4) 液晶ディスプレイの表面電極に用いられる ITO 膜は, インジウムと (⑦) の酸化物であり, 主に物理気相成長法の一つである (⑧) で成膜される。

問 3 鉄鋼材料の浸炭について考える。空欄に当てはまる数式または数値を答えよ。

- (1) γ Fe の 8 面体空隙に入る最大剛体球半径は, 図 2 に示すように鉄の原子半径を r とし, (①) r と求められる。炭素原子の大きさはこの空隙よりわずかに大きい。
- (2) γ Fe 中に侵入する炭素の拡散を考える。拡散係数 D は, ボルツマン定数 k , 振動因子 D_0 , 活性化エネルギー Q , 絶対温度 T を用いて, $D = D_0 \exp(-Q/kT)$ と表される。横軸に T^{-1} , 縦軸に $\ln D$ をとると, その関係は直線になり, その勾配は (②) に等しい。今, T_1 での拡散係数を D_1 とすると, 拡散係数が $2D_1$ になる温度 T_2 を求める関係式は, $T_2^{-1} - T_1^{-1} = (③)$ と求められる。



8 面体空隙

図 2

(次ページに続く)

(3) 表面濃度が常に C_s [mass%] の半無限厚板 (濃度 C_0 [mass%]) を一定温度で時間 t 保持して炭素を拡散させたときの表面から x の深さでの濃度 C_x [mass%] の関係式は、

$$\frac{C_s - C_x}{C_s - C_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} \exp(-\lambda^2) d\lambda = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

となる。右辺の値が 0.66 になる拡散距離を表すアインシュタインの式 $x = \sqrt{2Dt}$ から、炭素の浸炭深さを求める。1200 K での γ Fe 中の炭素の拡散係数を $D = 3.0 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$ として、表面炭素濃度が 1.0 mass% C になるような浸炭雰囲気 0.1 mass\% C-Fe を加熱した。表面から 0.1 mm の深さでの濃度は、関係式の $(C_s - C_x)/(C_s - C_0) = 0.66$ から、(④) mass% C となる。また拡散にかかる時間は、アインシュタインの式から (⑤) s と見積ることができる。

問 4 平砥石による研削時の仕上げ面粗さについて、図 3 のように単純化したモデルを用いて考える。ここで、工作物は固定されており、砥石が矢印の向きに切込み量 d で移動量 L だけ運動したとする。砥石は長さが $l (< L)$ であり、A の位置を通り過ぎる。このとき、空欄に当てはまる数式または語句を答えよ。

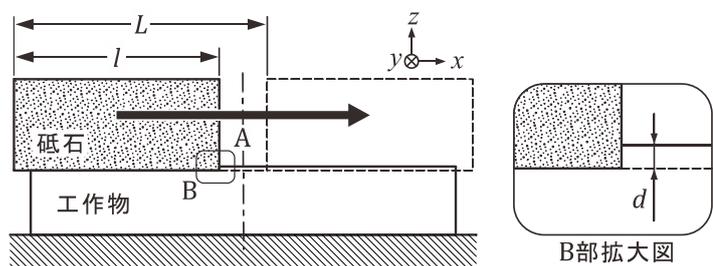


図 3

砥石は (①) を (②) で固めたもので、内部に多数の切れ刃が一樣に分布したものと考えられる。

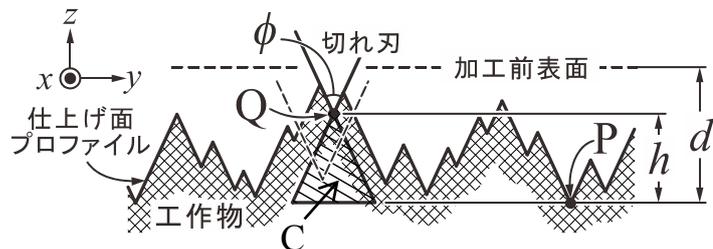


図 4

いま、各切れ刃の先端角が一樣に ϕ であると仮定し、研削後の A の位置における仕上げ面プロファイルが図 4 のようになったとする。このとき、プロファイル中で最も深い加工溝の谷底 P は砥石表面にある切れ刃により作製され、その谷底の深さ (工作物の加工前表面からの距離) は切込み量 d である。一方、最も浅い加工溝の谷底 Q は、砥石表面から h だけ内側にある切れ刃により作られたものである。この h が仕上げ面粗さを形成する基本の大きさである。

ここで、点 Q が加工されずに残っているということは、他の切れ刃によって Q を内包する加工溝が作られなかったということである。つまり、斜線で示される三角形 C を断面とする、長さ l の砥石内部の三角柱内には、破線で示されるような点 Q を含む切れ刃が存在しなかったことになる。このことから、もしこの三角柱内に 1 個以上の切れ刃が存在すれば h をより小さくできることがわかる。この条件を、砥石中の切れ刃の密度 N を用いて式で表すと (③) ≥ 1 となる。

したがって、仕上げ面粗さは切込み量とは無関係であり、粗さを小さくするには、 l を大きくするか、(④) あるいは (⑤) である砥石を使うことが有効である。

(問題 1 終わり)

問題 2 (材料力学)

問 1 次の□内に最も適する語句または式を解答せよ。ただし、解答用紙には解答だけを記述せよ。

- (1) 円筒（縦弾性係数 E_1 ，断面積 A_1 ，長さ L ）の内部に，円筒と同じ長さの丸棒（縦弾性係数 E_2 ，断面積 A_2 ，長さ L ）を同心に配置し，両端を剛体板で固定した組み合わせ材がある。なお，円筒の内面と丸棒の側面は接触しない。これに剛体板を通じて圧縮力 W を加える時，円筒に生じる応力は□①，円筒の縮みは□②となる。
- (2) 丸棒（縦弾性係数 E ，線膨張係数 α ，直径 d ，長さ L ）の両端を剛体壁に固定した後， ΔT だけ温度を上昇させた。このとき，丸棒に生じるひずみは□③，応力は□④である。
- (3) 内径 d_i ，外径 d_o の中空丸軸と直径 d の中実丸軸がある。中空丸軸と中実丸軸の断面二次極モーメントが等しくなるとき，□⑤の断面積のほうが小さい。
- (4) 平面応力状態において，主せん断応力は主応力 σ_1 と σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2$) を用いて \pm □⑥と表すことができる。また，主せん断応力面は主応力面と□⑦度に交わる。
- (5) 一端固定，他端自由の細長い円柱（縦弾性係数 E ，断面二次モーメント I ，長さ L ）の弾性座屈荷重は $\pi^2 EI / (4L^2)$ で表せる。この円柱を両端回転支持したときの弾性座屈荷重は□⑧となる。
- (6) 明瞭な降伏点が見られない金属材料の場合，一般に永久ひずみが□⑨%になるときの応力を□⑩と呼び，降伏点の代わりに用いる。

(次ページに続く)

問 2 図 1 に示すように、両端を固定した真直はり AB（曲げ剛性 EI 、長さ L ）の一端 A を微小角 θ_0 だけ回転させた。自重および軸方向の外力は無視する。以下の手順で重ね合わせの原理を用いて、固定端 A と B のそれぞれにおいてはりに作用する支持反力 R_A と R_B 、支持モーメント M_A と M_B 、およびはりに生じる最大曲げ応力 σ_{\max} を求めたい。ただし、 R_A 、 R_B 、 M_A 、 M_B は、図 1 に示す方向を正とする。

- (1) R_A 、 R_B 、 M_A 、 M_B の間に成立する二つの関係式を示せ。
- (2) A 端が自由端であると仮定し、A 端に集中荷重 R_A のみを作用させたとき、A 端におけるたわみ w_R とたわみ角 θ_R を導出せよ。
- (3) A 端が自由端であると仮定し、A 端に集中モーメント M_A のみを作用させたとき、A 端におけるたわみ w_M とたわみ角 θ_M を導出せよ。
- (4) w_R と w_M および θ_R と θ_M の間にそれぞれ成立すべき二つの関係式を示せ。
- (5) (2)と(3)で導出した w_R と w_M および θ_R と θ_M を(4)で求めた関係式に代入して、 R_A と M_A を求めよ。
- (6) はり AB の断面形状を図 2 に示す。中立軸 (z 軸) まわりの断面二次モーメント I を求めよ。
- (7) はり AB に生じる最大曲げ応力 σ_{\max} を求めよ。

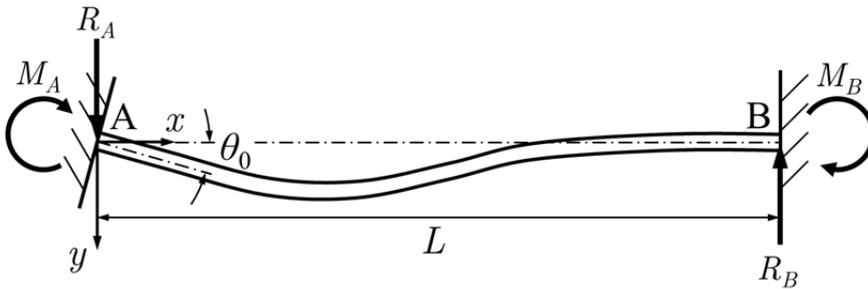


図 1

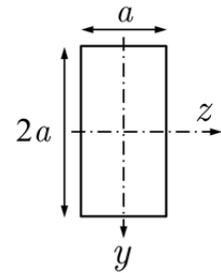


図 2

(問題 2 終わり)

問題 3 (機構運動・機械力学)

問 1 図 1 に示すように、2 質点が質量の無視できるばねとダンパで結合されている振動系を考える。この振動系は摩擦のない水平面に置かれており、 x 方向(水平方向)のみに振動する。2つの質点の質量はどちらも m であり、ばね定数とダンパの粘性減衰係数はそれぞれ k と c である。2つの質点の変位を静的平衡状態での位置を原点として x_1 と x_2 で表す。振動を発生させるために左側の質点に外力 f を作用させる。以下の問いに答えよ。

- (1) この系の運動方程式を導出し、行列とベクトル表記での方程式として示せ。
- (2) この系の振動について、その不減衰固有角振動数と減衰比を求めよ。
- (3) 外力 f から両方の質点それぞれの変位振幅までの周波数応答関数を求めたところ図 2 の(a)と(b)を得た。それらの周波数応答関数の図はどちら側の質点の周波数応答関数であるか判別せよ。判別の根拠も示せ。
- (4) 図 2 (a)において振幅が急激に低下している A で示される周波数の値を $c=0$ として求めよ。

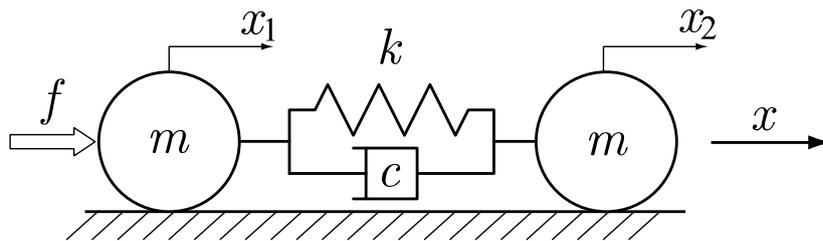


図 1

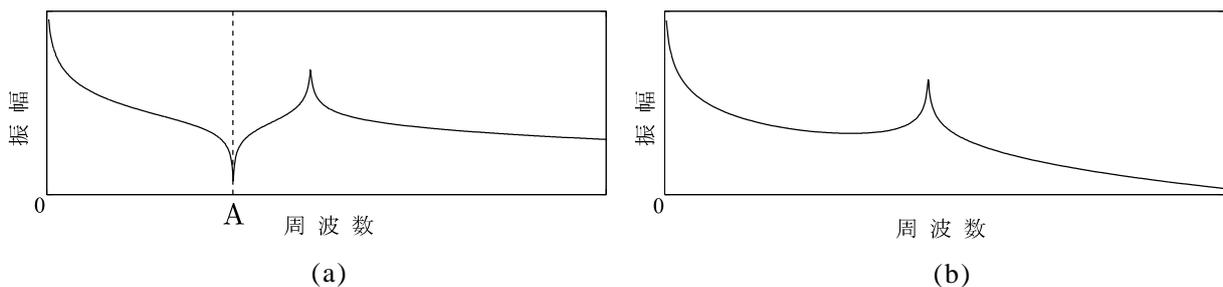


図 2

(次ページに続く)

問 2 図 3 に示すように、鉛直面内で運動する 2 リンクマニピュレータを考える。このマニピュレータは、長さがそれぞれ a, b [m] の 2 つのリンクがアクチュエータで駆動される回転ジョイント A および B により連結され、その先端 P に質量 m [kg] で大きさが無視できる物体が取り付けられている。ジョイント A および B の角変位、角速度および駆動トルクを $\theta_A, \theta_B, \omega_A, \omega_B, \tau_A, \tau_B$ とし、アクチュエータを含めて、リンクの質量と慣性モーメントおよびジョイントの摩擦は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 次の諸量を求めよ。

(i) B および P の座標, $B(X_B, Y_B), P(X_P, Y_P)$ を a, b, θ_A, θ_B を用いて表せ。

(ii) P の X 軸方向および Y 軸方向の速度 $\mathbf{v} = [v_x \ v_y]^T$ とジョイントの角速度 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_A \ \omega_B]^T$ の関係は $\mathbf{v} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ のように行列 \mathbf{J} を用いて表すことができる。この行行列 \mathbf{J} を a, b, θ_A, θ_B を用いて表せ。

(iii) 行行列 \mathbf{J} を X_B, Y_B, X_P, Y_P を用いて表せ。

(2) P に作用する外力 $\mathbf{f} = [f_x \ f_y]^T$ (重力を含む) とジョイント A および B の駆動トルク $\boldsymbol{\tau} = [\tau_A \ \tau_B]^T$ が釣り合っているとき、これらの間には、(1) の行行列 \mathbf{J} を用いて $\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}^T \mathbf{f}$ なる関係が成り立つ。このことを示せ。

(3) $a=b=2$ として、P が $Y=3$ の直線上を等速度で $X=-2$ から $\sqrt{3}$ (単位は m) まで移動するとき、駆動トルク τ_A および τ_B それぞれの変化の概略を図示し、それらの絶対値が最大値を取る瞬間におけるマニピュレータの形態を図示せよ。なお、 $0 \leq \theta_B \leq \pi$ とする。

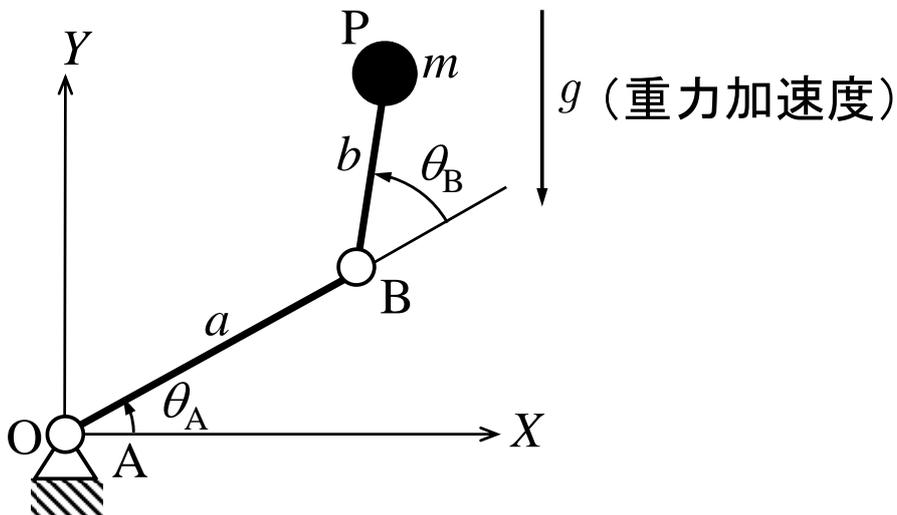


図 3

(問題 3 終わり)

問題4 (流体力学)

問1 液体自由表面の波動方程式を導出する。粘性の効果は極めて小さいとして無視し、非圧縮の完全流体が一様な重力場で行う運動とする。以下の説明文の()に該当する数式を解答用紙に記せ。

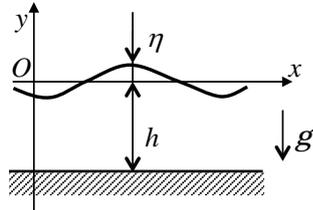


図1

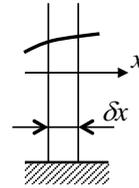


図2

図1のとおり、静止状態の水面に沿う方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をそれぞれとり、 x 、 y 方向の速度成分をそれぞれ u 、 v とし、水面波は x 軸方向のみに伝播するものとする。時刻を t 、圧力を p 、重力加速度を g 、大気圧を p_a 、水の密度を ρ とし、静止状態の水深を h 、静止状態の水面位置を基準とした y 方向の水面の変位を $\eta(x, t)$ とする。 x 、 y 方向それぞれの水の運動方程式は Navier-Stokes 方程式から不要な項を消去することで以下のように与えられる。

$$x \text{ 方向: } \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1a), \quad y \text{ 方向: } \frac{Dv}{Dt} = (\text{①}) + (\text{②}) \quad (1b)$$

水面波の波長が水深に比べて十分大きい場合、鉛直方向の加速度は小さいため、式(1b)の左辺を 0 とする。水面 $y = \eta(x, t)$ の圧力は大気圧なので

$$p = (\text{③}) \quad (2)$$

式(2)を式(1a)に代入して

$$\frac{Du}{Dt} = (\text{④}) \quad (3)$$

η は x と t だけの関数なので、 Du/Dt は y に依存せず、速度の初期値が 0 なら u も y によらない。波の運動に伴う u は一般に小さいことから、式(3)の左辺は (⑤) と書き換えられ、式(3)は以下のように書き換えられる。

$$(\text{⑤}) = (\text{④}) \quad (4)$$

次に図2に示すような x 軸方向の厚さ δx の領域に含まれる水の質量保存を考える。領域の紙面奥行き方向の厚さを 1 とし、式(5)のように質量保存の方程式をたてる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \rho \cdot (\eta + h) \cdot \delta x \cdot 1 \} = (\text{⑥}) - (\text{⑦}) \quad (5)$$

ここで、右辺は単位時間にこの領域を出入りする水の質量の差し引きを表す。左辺の h の時間微分項を消去する。右辺を整理し、 η は h に比して十分小さいとして η を無視すると式(5)は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (hu) \quad (6)$$

式(4)、(6)は線形の連立偏微分方程式となる。 η 、 u をそれぞれ消去し、とくに水深 h が一定の場合、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7a), \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (7b), \quad \text{ただし, } c = (\text{⑧}) \quad (7c)$$

となり、1次元の波動方程式が得られる。

(次ページに続く)

問 2 図 3 に示すように内側に半径 R_1 の円管，外側に半径 R_2 の円管を持つ無限に長い同心二重円管に密度 ρ ，粘度 μ の粘性流体を流す場合を考える。それぞれの円管の肉厚は非常に薄く，流れは層流を仮定できるものとする。また，重力の効果は無視できる。以下の文章において，[] については該当する選択肢を，() については該当する語句あるいは数式を解答用紙に記せ。ただし，数式の場合にはその導出も記述すること。なお，必要ならば， $m \neq -1$ のとき

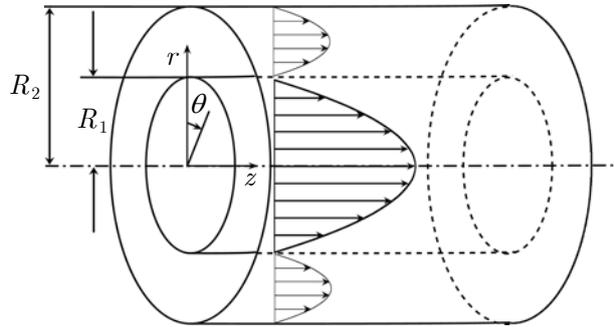


図 3

$$\int x^m \ln x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(\ln x - \frac{1}{m+1} \right)$$

であることを用いよ。

図 3 のように円筒座標系 (r, θ, z) を設定し，速度の各方向成分をそれぞれ u_r, u_θ, u_z とする。流れは z 方向成分のみを有するため，円筒座標系における (①) 式は

$$[\text{②} \quad A : \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) = 0, \quad B : \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad C : \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0] \quad (1)$$

となる。また，(③) 式から r 方向と θ 方向の圧力勾配は無く， z 方向の圧力勾配は，次のように (④) と釣り合うことになる。

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (2)$$

これらのことは，圧力が [⑤ A : r , B : θ , C : z] のみの関数であることを示している。

内側の円管内の流れに対して式(2)を解くと， z 方向速度は $\eta = r/R_1$ として

$$u_z = \frac{R_1^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \times (\text{⑥} \quad \text{【注：}\eta\text{のみの関数として解答せよ】}) \quad (3)$$

となる。この速度分布から，流量は

$$Q = \int_0^{R_1} u_z 2\pi r dr = \frac{\partial p}{\partial z} \times (\text{⑦}) \quad (4)$$

と求められる。この流れは，[⑧ A : ハーゲン・ポアズイユ，B : レーリー，C : ストークス] 流と呼ばれている。

次に，二重円筒間について式(2)を解き， $\alpha = R_2/R_1$ とすれば

$$u_z = \frac{R_1^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \times (\text{⑨} \quad \text{【注：}\eta\text{と}\alpha\text{の関数として解答せよ】}) \quad (5)$$

となる。この場合の流量は

$$Q = - \frac{\pi R_1^4}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \times (\text{⑩} \quad \text{【注：}\alpha\text{のみの関数として解答せよ】}) \quad (6)$$

である。

同一の圧力勾配条件で，内側円管と二重円筒間の流量が等しくなるのは，

(⑪ 【注： α のみを用いた式で解答せよ】) の条件であり， $R_2/R_1 \doteq 1.81$ である。

(問題 4 終わり)

問題5 (熱力学・伝熱工学)

問1 以下の(1)~(4)の () にあてはまるものとして、最も適切なものを選択肢より選び、記号で答えよ。

(1) メタンと空気が完全に混合した状態で、燃焼反応をする場合において、空気比（空気のモル数/メタンのモル数）を 1.2 から 1.4 に変化させた場合、メタン 1 mol あたりの反応熱は (①)。また、理論燃焼温度（断熱火炎温度）は (②)。ただし、生成物はどちらの空気比の場合も二酸化炭素、窒素、水蒸気、酸素しかないとする。

- (a) 減少する（低下する） (b) 変化しない (c) 増加する（上昇する）

(2) 無限の大きさを有する平板 1 と 2 が密着している状態の定常熱伝導において、平板 1 の表面温度を T_1 、両者の接触面温度を T_m とする。平板 1 と 2 それぞれの厚さを L_1 と L_2 、熱伝導率を k_1 と k_2 とすると、平板 2 の表面温度は (③) である。

- (a) $(1 + k_1 L_2 / k_2 L_1) T_m - (k_1 L_2 / k_2 L_1) T_1$ (b) $(1 + k_1 L_1 / k_2 L_2) T_m - (k_1 L_1 / k_2 L_2) T_1$
 (c) $(1 + k_1 L_2 / k_2 L_1) T_m + (k_1 L_2 / k_2 L_1) T_1$ (d) $(1 + k_1 L_1 / k_2 L_2) T_m + (k_1 L_1 / k_2 L_2) T_1$
 (e) $(1 + k_2 L_2 / k_1 L_1) T_m + (k_2 L_2 / k_1 L_1) T_1$

(3) 水の沸騰現象の概略を表す沸騰曲線（図1）では、縦軸に (④)、横軸に過熱度がとられる。ただし、過熱度の定義は (⑤) と (⑥) の差（ただし⑤>⑥）である。また、領域1は (⑦) 領域とよばれ、気泡は伝熱面上の小さなキズなどから生じる。図1のA点では (④) が極大となり、それ以上の過熱度では、状態が不安定（A点からB点にジャンプするなど）になる。なお、A点における (④) を (⑧) といい、その際の過熱度は (⑨)。

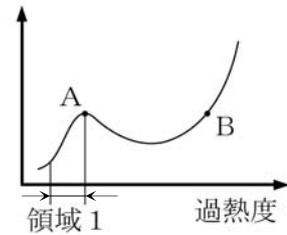


図1

- 【④~⑧の選択肢】(a) 伝熱面温度, (b) 熱通過率, (c) 熱流束, (d) 限界熱流束, (e) 圧力, (f) 臨界圧力, (g) 飽和温度, (h) 主流温度, (i) 膜沸騰, (j) 遷移沸騰, (k) 核沸騰
 【⑨の選択肢】(m) 数 K から 10 K 程度である, (n) 数十 K から 100 K 程度である,

(o) 1000 K 以上に至ることがある

(4) 1 mol の理想気体について、オットーサイクルの PV 線図を図2に示す。図中の数字は、サイクルにおける温度 T 、圧力 P 、体積 V の添え字に対応する。ただし、気体の比熱比を κ とする。

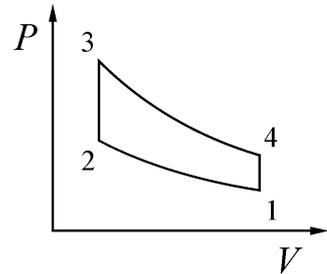


図2

温度 T_2 と圧力 P_2 を正しく表す組み合わせは (⑩)。

- (a) $T_2 = T_1 (V_2/V_1)^{\kappa-1}$ と $P_2 = P_1 (V_2/V_1)^\kappa$,
 (b) $T_2 = T_1 (V_2/V_1)^\kappa$ と $P_2 = P_1 (V_2/V_1)^{\kappa-1}$,
 (c) $T_2 = T_1 (V_1/V_2)^{\kappa-1}$ と $P_2 = P_1 (V_1/V_2)^\kappa$,
 (d) $T_2 = T_1 (V_1/V_2)^\kappa$ と $P_2 = P_1 (V_1/V_2)^{\kappa-1}$

このサイクルの正しい熱効率 η は (⑪)。

- (a) $\eta = \frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1}$, (b) $\eta = \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$, (c) $\eta = 1 - \frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1}$, (d) $\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$

(次ページに続く)

問2 図3に示すように、円すいを中心軸 (z 軸) に垂直方向 (底面に平行な平面) に切断した円すい台がある。円すいの頂点の座標を $z=0$ とする。物質は固体で、その熱伝導率は k とする。側面は断熱とする。底面を面1、上面を面2とし、面1、面2の中心から原点までの距離はそれぞれ H_1 、 H_2 とする。面1の温度は T_1 で一定とする。面2の直径を D_2 、温度を T_2 ($T_2 < T_1$) とする。面2では周囲の気体の温度 T_∞ との間で熱交換が行われ、その熱伝達係数を h とする。円すい台の z 軸と垂直な方向の温度分布は無視できるものとし、 z 軸方向のみに熱の伝わる一次元定常熱伝導系を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 円すい台の任意の位置 z ($H_2 \leq z \leq H_1$) における断面積 $A(z)$ を z の関数で表せ。
- (2) 得られた断面積とフーリエの法則を用いて、伝熱量 Q を z と温度 T の関数で表せ。但し、導関数を含む形でよい。
- (3) 面2における熱流束を q とする。面2の温度 T_2 を、 q を用いて表せ。ただし、 z 軸方向を正とする。
- (4) 上記(2)で得られた式を用い、面1から円すい台の任意の位置まで積分することにより、円すい台の任意の位置 z ($H_2 \leq z \leq H_1$) における温度 $T(z)$ を求めよ。
- (5) $z=H_2$ における温度が上記(3)で得られた温度 T_2 に等しいことを利用して、伝熱量 Q を求めよ。
- (6) 横軸に z 、縦軸に温度 T を取り、円すい台内の温度分布として最も適切なものを図4の(a)~(c)中から選べ。

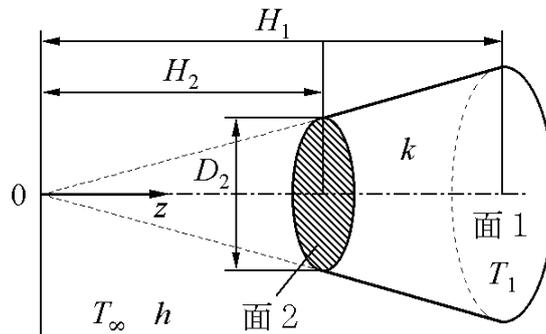


図3

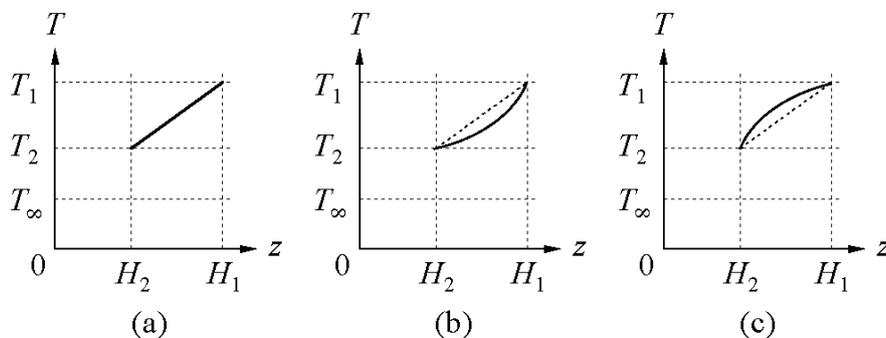


図4

(問題5 終わり)

問題 6 (制御理論)

問 1 図 1 に示すフィードバック系を考える。ただし、制御対象 $P(s)$ と制御器 $C(s)$ はそれぞれ

$$P(s) = \frac{s-2}{s^2+3s+2}, \quad C(s) = \frac{k}{s+1}$$

で与えられ、 k は正の定数である。

- (1) $P(s)$ の極と零点を求めよ。
- (2) $P(s)$ のインパルス応答を求めよ。
- (3) $P(s)$ のナイキスト線図の概形を図 2 の (A)~(E) から選び、その理由を述べよ。
- (4) $C(s)$ の周波数伝達関数 $C(j\omega)$ を求め、 ω を変化させたときの $|C(j\omega)|$ の最大値を求めよ。
- (5) ω を変化させたときの $|P(j\omega)|$ の最大値を β とおく。定数 k を、 $\beta k < 1$ を満たすように選べば、ナイキストの安定判別法からフィードバック系が必ず安定となることを図を用いて説明せよ。

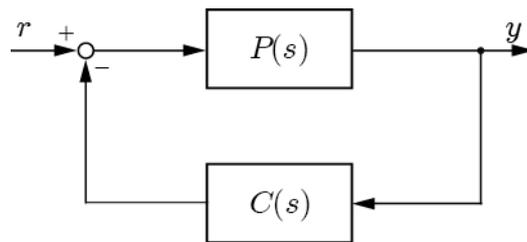


図 1

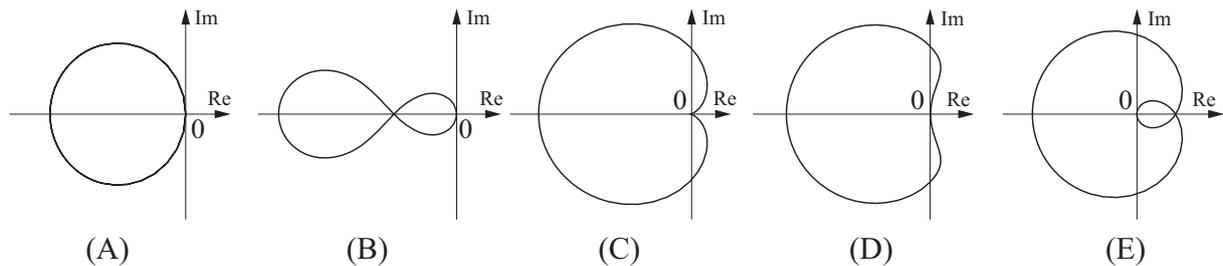


図 2

(次ページに続く)

問 2 状態方程式 (Σ) として

$$(\Sigma) \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

を考える。ここで $x(t) \in R^n$ は状態, $y(t) \in R$ は出力である。

- (1) 状態方程式 (Σ) の可観測性行列を示せ。また, 可観測であることを判定するための条件を示せ。
- (2) 状態方程式 (Σ) の可観測性について以下の問いに答えよ。
 - (i) 状態 $x(t)$ を遷移行列と $x(0)$ を用いて表現せよ。
 - (ii) 出力 $y(t)$ の k 階時間微分 $\frac{d^k y(t)}{dt^k}$ を $x(0)$ を用いて表現せよ。
 - (iii) (1) で示した判定条件が成り立つとき, $y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \dots$ から $x(0)$ を求める式を導出せよ。
- (3) 状態方程式 (Σ) の同次元オブザーバ $\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + H(C\bar{x}(t) - y(t))$ を考える。ここで $\bar{x}(t) \in R^n$ はオブザーバの状態, H は適当なサイズの行列である。このとき, オブザーバの推定誤差 $e(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ に関する状態方程式を求めよ。
- (4) 状態方程式 (Σ) の行列 A, C がつぎのように与えられるとき, (3) のオブザーバの推定誤差 $e(t)$ が $t \rightarrow \infty$ で 0 に収束するための行列 H の各要素が満たすべき条件を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(問題 6 終わり)

問題 7 (信号処理)

問 1 信号 $x(t)$ に対する劣化を, 以下の式で表現する。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

ただし, $y(t)$ は劣化後の信号を, $h(t)$ は劣化を表す関数である。

また, $x(t)$, $y(t)$, $h(t)$ のフーリエ変換を, それぞれ $X(f)$, $Y(f)$, $H(f)$ と表す。

以下の問いに答えよ。

- (1) $Y(f)$ を $X(f)$, $H(f)$ を用いて表せ。結果だけではなく, 導出過程も示すこと。
- (2) w をある正の数として $h(t)$ が以下で表されるとき, そのフーリエ変換 $H(f)$ を求め, その概形を図示せよ。さらに, そのときの $Y(f)$ を $X(f)$ を用いて表せ。

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2w} & (|t| < w) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

- (3) 前問(2)で, w が大きくなると, この劣化による影響はどのように変化するか説明せよ。
- (4) 前問(2)の劣化に対し, $Y(f)$ から $X(f)$ を復元する方法と, その方法の限界について述べよ。
- (5) 劣化による信号の変化がない, すなわち $y(t) = x(t)$ であるとき, $h(t)$ はどのような関数で表されるか。理由と共に示せ。

(次ページに続く)

問 2 両皿天秤を用いた測定により、2つの試料1, 2の質量 m_1, m_2 をできるだけ精度よく求めたい。両皿天秤を用いた測定においては、左右いずれか、または両方の皿に試料をのせたのち、分銅を使って平衡を取ることににより質量測定を行うこととする。その際、1回の測定では、測定によらずランダムで独立な誤差 ε が生じるものとし、誤差 ε は平均0, 分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。

ここで、以下(a)–(c)の、2回の測定を行う3通りの手順について検討する。

(a) 試料1の質量 m_1 を測定し、その測定値を w_1 としたのち、試料2の質量 m_2 を測定し、その測定値を w_2 とする。

(b) 試料1の質量 m_1 を測定し、その測定値を w_1 としたのち、試料1と試料2の質量の和 $m_1 + m_2$ を測定し、その測定値を w_{1+2} とする。

(c) 試料1と試料2の質量の和 $m_1 + m_2$ を測定し、その測定値を w_{1+2} としたのち、試料1と試料2の質量の差 $m_1 - m_2$ を測定し、その測定値を w_{1-2} とする。

このとき、以下の(1)–(4)の問いに答えよ。

(1) (a)における測定値 w_1, w_2 の誤差を $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ とするとき、 m_1, m_2 を $w_1, w_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ を用いて表すとともに、質量 m_1, m_2 の推定誤差の分散を σ を用いて表せ。

(2) (b)における測定値 w_1, w_{1+2} の誤差を $\varepsilon_1, \varepsilon_{1+2}$ とするとき、 m_1, m_2 を $w_1, w_{1+2}, \varepsilon_1, \varepsilon_{1+2}$ を用いて表すとともに、質量 m_1, m_2 の推定誤差の分散を σ を用いて表せ。

(3) (c)の測定は具体的にどのようにすればよいか、天秤の操作方法を簡潔に記述せよ。

(4) (c)における測定値 w_{1+2}, w_{1-2} の誤差を $\varepsilon_{1+2}, \varepsilon_{1-2}$ とするとき、 m_1, m_2 を $w_{1+2}, w_{1-2}, \varepsilon_{1+2}, \varepsilon_{1-2}$ を用いて表すとともに、質量 m_1, m_2 の推定誤差の分散を σ を用いて表せ。

同様に、3つの試料1, 2, 3の質量 m_1, m_2, m_3 を、両皿天秤を用いた3回の測定により求める場合について、次の問いに答えよ。

(5) 試料1, 2, 3の質量 m_1, m_2, m_3 の推定誤差すべてが、ひとつずつ試料を測定するよりも小さくなると期待できる手順を示し、そのときの質量 m_1, m_2, m_3 の推定誤差の分散を σ を用いて表せ。

(問題 7 終わり)

問題 8 (電気回路)

問 1 以下の問いに答えよ。

(1) 図 1 のように角周波数 ω の正弦波電圧源につながれた回路を考える。

(i) 電圧源の瞬時値が

$$v_0(t) = \sqrt{2}V_e \sin(\omega t + \phi)$$

で与えられるとき、電圧源の電圧の複素表示 V_0 を示せ。

(ii) Z のインピーダンスを $X(\omega) + jY(\omega)$ とする。ただし、 $X(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ は実数とする。 Z に流れる電流の複素表示 I を求めよ。

(iii) Z で消費される実効電力 P を V_0 と I を用いて表せ。また、 P を V_e 、 $X(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ を用いて表せ。

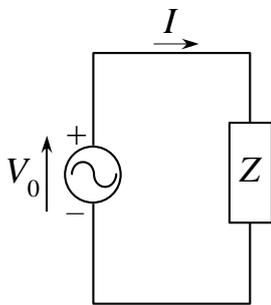


図 1

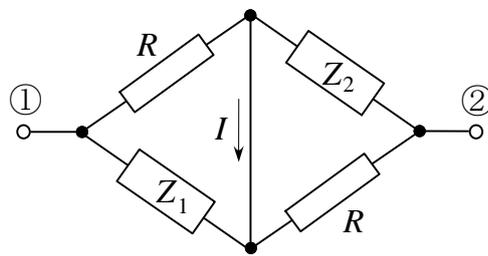


図 2

(2) 大きさ R の抵抗 2 個と、インピーダンス Z_1 、 Z_2 からなる図 2 の回路を考える。電流 $I=0$ とするための Z_2 の条件を、 R 、 Z_1 を用いて表せ。また、この条件を満たすとき、①と②の間のインピーダンスをできるだけ簡単な形で求めよ。

(3) 図 3 (a) と図 3 (b) の回路を考える。図 3 (b) の回路の①と②の間のインピーダンスが、図 3 (a) の回路の①と②の間のインピーダンスの逆数となる Z_3 、 Z_4 の組を一つ求めよ。

(4) 図 4 の回路を考える。 $R=1[\Omega]$ 、 $Z_3=1+j\omega[\Omega]$ のとき、①と②の間で消費される実効電力が角周波数 ω に依存しなくなった。インピーダンス Z_4 を求めよ。また、 Z_4 の回路の具体的な構成例を一つ示せ。



図 3 (a)

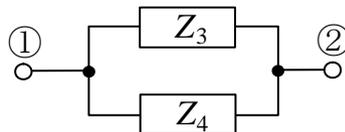


図 3 (b)

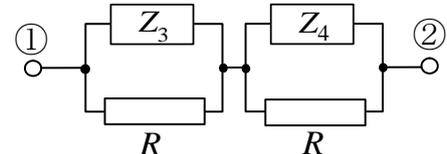


図 4

(次ページに続く)

問2 図5に示すように交流電源で負荷を駆動する回路を考える。ここで、 S は正弦波交流電源を表し、 V_s は電圧源 U の電圧、 R_s は内部抵抗の大きさを示す。 N は伝送路を表す二端子対回路で、負荷は大きさ R_L の抵抗である。また、各接続端子間の電圧 V_1 、 V_2 、および電流 I_1 、 I_2 の間には、伝送行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ を用いて次式の関係が成り立つものとする。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{ただし、} AD - BC \neq 0$$

以下の問いに答えよ。ただし、答えは V_1 、 V_2 、 I_1 、 I_2 を用いずに表すこと。

- (1) 端子 1-1'から端子 2-2'までの電圧伝送比 $G_{12} = \frac{V_2}{V_1}$ を求めよ。
- (2) 電圧源 U を短絡して端子 2-2'を開放したときの出力端開放インピーダンス $Z_0 = \frac{V_2}{-I_2}$ を求めよ。
- (3) 電圧源 U から端子 2-2'までの電圧伝送比 $G_{s2} = \frac{V_2}{V_s}$ を求めよ。
- (4) 端子 2-2'を開放した場合の等価回路として、電圧 V_0 の電圧源 U' とインピーダンス Z_0 で構成された図6の回路を考える。このとき V_0 を求めよ。

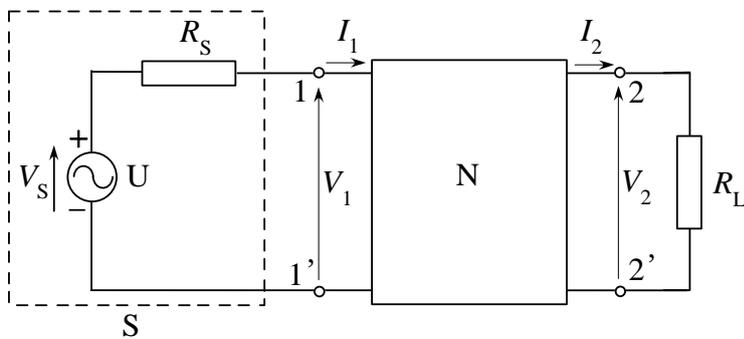


図5

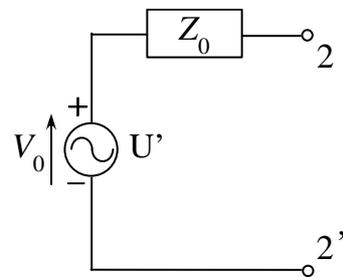


図6

(問題8 終わり)