筆答専門試験科目 (午前)　　**30　大修**

数理・計算科学

Mathematical and Computing Science

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

Time 9:30AM – 1:00PM

注意事項

1. 問 A, 問 B, 問 C より 2 問を選択し解答せよ.
2. 問 1～問 9 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. 解答は 1 問ごとに 1 枚の解答用紙に記入せよ.
6. 解答用紙の裏面を使用しても構わないが，その場合は表に「裏面へ続く」等の表示を書いておくこと.

Instruction

1. Solve 2 problems out of Problems A, B, and C.
2. Solve 3 problems out of Problems 1 to 9.
3. Note that if you solved more problems than specified above, problems you solved might not be scored.
4. Write the problem number and your examinee number in the designated place of each answer sheet.
5. Use one answer sheet per problem.
6. You may use the other side of the answer sheet, but in that case you should indicate that, for example, by writing “continue to the other side.”

問 A

n 次元線形ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 T に対して $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は写像 T の不動点とよばれる．正整数 k に対して，T^k を T の k 回合成写像とする．つまり $T^1 = T$，$T^k = T \circ T^{k-1} \quad (k \geq 2)$．$n = 3$ としたとき，以下の行列

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

によって定義された写像 $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ について答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ．

(2) T^k のすべての不動点からなる集合は $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間になることを示せ．

(3) T のすべての不動点からなる線形部分空間の次元と基底となるベクトル一組を求めよ．

(4) T^k のすべての不動点からなる線形部分空間の次元と基底となるベクトル一組を求めよ．

Problem A

Let T be a mapping from the n-dimensional linear space $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$. We call $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a fixed point of the mapping T if $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. For a positive integer k, let T^k be the k times composition mapping of T. That is, $T^1 = T$ and $T^k = T \circ T^{k-1} \quad (k \geq 2)$. Answer the questions, when $n = 3$, for the mapping $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ defined by the following matrix

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Compute all eigenvalues of $\boldsymbol{A}$.

(2) Show that the set consisting of all fixed points of T^k is a linear subspace of $\mathbb{R}^3$.

(3) Determine the dimension and a basis of the linear subspace defined by all fixed points of T.

(4) Determine the dimension and a basis of the linear subspace defined by all fixed points of T^k.

問 B

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が,

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n, \quad a_n \geq 0$$

を満たすとする.

(1) $n \to \infty$ のとき，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束することを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束するか．収束するならば証明し，収束しないならば反例をあげよ.

Problem B

Suppose a sequence $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfies

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2} a_n, \quad a_n \geq 0.$$

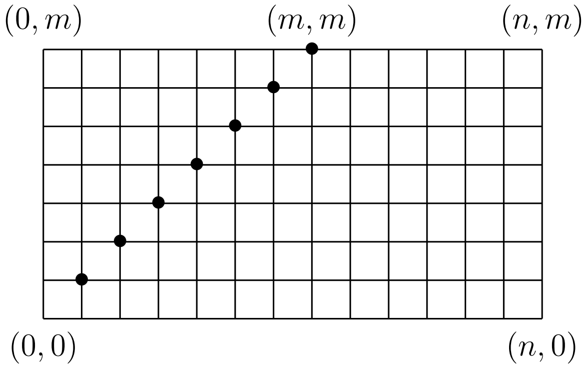
Answer the following questions.

(1) Show $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converges as $n \to \infty$.

(2) Does the series $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge? Prove it or give a counterexample.

問 C

以下の図に示すような $n \times m$ の格子を考える．ただし $n \geq m \geq 1$ とする．



$n \times m$ の格子の例 $(n = 13, m = 7)$

ここで，点 $(0,0)$ から点 (n,m) まで，条件 1 を満たすように隣接する点の間を移動する経路全体の集合を $\mathcal{P}(n,m)$ とする．

- **条件 1:** 経路上の全ての点に関して，その右または上の隣接点へのみ移動可能．

有限集合 A に対して $|A|$ は A の濃度 (要素数) を表すものとする．

(1) $|\mathcal{P}(n,m)|$ を求めよ．

$\mathcal{P}(n,m)$ に含まれる経路で，条件 2 を満たす経路全体の集合を $\mathcal{B}(n,m) \subseteq \mathcal{P}(n,m)$ とする．

- **条件 2:** ある $a \in \{1,\ldots,m\}$ に対して，経路上に点 (a,a) が存在する．すなわち，経路は上図に示した $\bullet$ 印の点を少なくとも 1 つ経由する．

集合 $\mathcal{B}(n,m)$ を $\mathcal{B}_{(0,1)}(n,m) \subseteq \mathcal{B}(n,m)$ と $\mathcal{B}_{(1,0)}(n,m) \subseteq \mathcal{B}(n,m)$ に分割する．

- $\mathcal{B}_{(0,1)}(n,m)$: $\mathcal{B}(n,m)$ に含まれる経路で，点 $(0,1)$ を通る経路全体の集合．
- $\mathcal{B}_{(1,0)}(n,m)$: $\mathcal{B}(n,m)$ に含まれる経路で，点 $(1,0)$ を通る経路全体の集合．

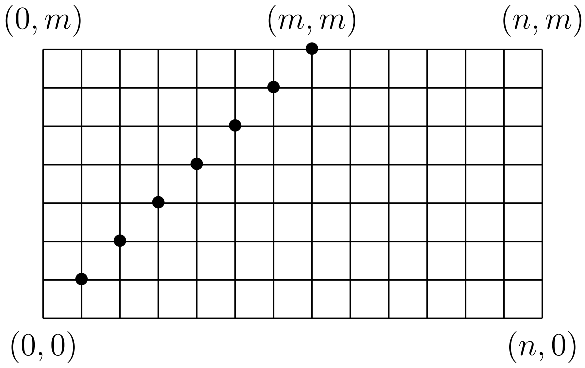
(2) $|\mathcal{B}_{(0,1)}(n,m)|$ を求めよ．

(3) $|\mathcal{B}_{(1,0)}(n,m)|$ を求めよ．

(4) $r(n,m) = \frac{|\mathcal{G}(n,m)|}{|\mathcal{P}(n,m)|}$ を求めよ．ただし $\mathcal{G}(n,m) = \mathcal{P}(n,m) \setminus \mathcal{B}(n,m)$．また $n = 15, m = 10$ として $r(15,10)$ を求めよ．

Problem C

Given an $n \times m$ lattice as shown in the following figure, where $n \geq m \geq 1$.



An example of $n \times m$ lattice ($n = 13, m = 7$)

Let $\mathcal{P}(n, m)$ be the set of all paths that move from the point $(0, 0)$ to the point (n, m) and satisfy the following condition C1.

- C1: For any point (i, j) on a path in $\mathcal{P}(n, m)$, it moves only to the point $(i + 1, j)$ or to the point $(i, j + 1)$.

For a finite set A, let $|A|$ be the cardinality of A (or the number of elements in A).

(1) Derive $|\mathcal{P}(n, m)|$.

Let $\mathcal{B}(n, m) \subseteq \mathcal{P}(n, m)$ be the set of all paths that satisfy the following condition C2.

- C2: For some $a \in \{1, \ldots, m\}$, there exists a point (a, a) on a path, i.e., the path goes through one of the points marked by $\bullet$ in the above figure.

Define $\mathcal{B}_{(0,1)}(n, m) \subseteq \mathcal{B}(n, m)$ and $\mathcal{B}_{(1,0)}(n, m) \subseteq \mathcal{B}(n, m)$ as follows:

- $\mathcal{B}_{(0,1)}(n, m)$ is the set of all paths in $\mathcal{B}(n, m)$ that go through the point $(0, 1)$.
- $\mathcal{B}_{(1,0)}(n, m)$ is the set of all paths in $\mathcal{B}(n, m)$ that go through the point $(1, 0)$.

(2) Derive $|\mathcal{B}_{(0,1)}(n, m)|$.

(3) Derive $|\mathcal{B}_{(1,0)}(n, m)|$.

(4) Derive $r(n, m) = \frac{|\mathcal{G}(n,m)|}{|\mathcal{P}(n,m)|}$, where $\mathcal{G}(n, m) = \mathcal{P}(n, m) \setminus \mathcal{B}(n, m)$. For $n = 15, m = 10$, derive $r(15, 10)$.

問 1

$\mathbb{C}$ の部分環 $R = \{r = a + bi;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ を考える．ここで，$i^2 = -1$.

(1) 環 R のイデアル $I = (2 + i)$ と $J = (5)$ について，つぎが成り立つか否かを理由をつけて述べよ．

$$I \supset J$$

ここで，(r) は R の元 r で生成されるイデアルである．

(2) イデアル $I = (2 + i)$ による商環 R/I において，元 $x = [1 - i]$ の積に関する逆元 x^{-1} を求めよ．ここで，$[r]$ は r の同値類である．

(3) 上の問の環 R/I の乗法群 $G = (R/I)^*$ は巡回群であるか否かを理由をつけて述べよ．もし巡回群であれば，群 G の位数と生成元の一つを求めよ．

Problem 1

Consider the subring $R = \{r = a + bi;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ of $\mathbb{C}$. Here, $i^2 = -1$.

(1) For ideals $I = (2 + i)$ and $J = (5)$ of the ring R, determine whether the following statement is true or not.

$$I \supset J$$

Here, (r) is the ideal generated by an element r in R.

(2) In the quotient ring R/I by the ideal $I = (2 + i)$, find the multiplicative inverse x^{-1} of the element $x = [1 - i]$. Here, $[r]$ is the equivalence class of r.

(3) Determine whether the multiplicative group $G = (R/I)^*$ of the ring R/I in the above question is a cyclic group or not. If the group G is a cyclic group, find the order and a generator of the group G.

問 2

単位円 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 = 1\}$ の部分集合族

$$\mathcal{O} = \{U \subset S^1\,;\, S^1 \text{ における } U \text{ の補集合は有限集合}\} \cup \{\emptyset, S^1\}$$

について，以下の問に答えよ．ただし，$\emptyset$ は空集合を表す．

(1) $\mathcal{O}$ は S^1 の位相を定めることを示せ．

(2) $(S^1, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間か否かを理由をつけて述べよ．

(3) $(S^1, \mathcal{O})$ は連結か否かを理由をつけて述べよ．

(4) $(S^1, \mathcal{O})$ はコンパクトか否かを理由をつけて述べよ．

Problem 2

Let S^1 be the unit circle, that is,

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Consider the following family of subsets of S^1

$$\mathcal{O} = \{U \subset S^1 \,;\, \text{the complement of } U \text{ in } S^1 \text{ is a finite set}\} \cup \{\emptyset, S^1\},$$

where $\emptyset$ is the empty set. Answer the following questions.

(1) Show that $\mathcal{O}$ gives a topology of S^1.

(2) Determine whether $(S^1, \mathcal{O})$ is a Hausdorff space or not.

(3) Determine whether $(S^1, \mathcal{O})$ is connected or not.

(4) Determine whether $(S^1, \mathcal{O})$ is compact or not.

問 3

$[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$ で定義された C^2 級の関数 $u(t,x)$ が，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x,$$

$$u(0,x)=x,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0$$

を満たすとする．

(1) $v=u+\dfrac{1}{6}x^3$ とおく．v の満たす偏微分方程式を求めよ．

(2) u を求めよ．

Problem 3

Suppose a function $u \in C^2([0,\infty) \times (-\infty,\infty))$ satisfies

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x,$$

$$u(0,x) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0.$$

Answer the following questions.

(1) Let $v = u + \dfrac{1}{6}x^3$. Find a partial differential equation satisfied by v.

(2) Find u.

問 4

実数 θ をパラメータとする次の線形計画問題 $\mathcal{P}(\theta)$ を考える：

$$
\mathcal{P}(\theta) \ : \ \begin{array}{lcrcl}
\text{最大化} & : & 6x_1 + (-3+\theta)x_2 + (4+\theta)x_3 & & \\
\text{制約} & : & -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 & \leq & 5 \\
 & & 2x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 2 \\
 & & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 5 \\
 & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

$\mathcal{P}(\theta)$ の最適解と最適値をそれぞれ $(x_1^*(\theta), x_2^*(\theta), x_3^*(\theta))$ と $z^*(\theta)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\theta = 0$ のときの最適解 $(x_1^*(0), x_2^*(0), x_3^*(0))$ と最適値 $z^*(0)$ を求めよ．

(2) $(x_1^*(0), x_2^*(0), x_3^*(0))$ が $\mathcal{P}(\theta)$ の最適解でもあるような θ の範囲を求めよ．

(3) (2) で求めた θ の範囲において，$z^*(\theta)$ を θ の関数として表せ．

Problem 4

Consider the following linear programming problem $\mathcal{P}(\theta)$ parameterized by a real number θ,

$$
\mathcal{P}(\theta) \ : \quad \begin{array}{lrcl}
\text{maximize} & : \ 6x_1 + (-3+\theta)x_2 + (4+\theta)x_3 & & \\
\text{subject to} & : \qquad -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 2 \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 5 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Let us use $(x_1^*(\theta), x_2^*(\theta), x_3^*(\theta))$ and $z^*(\theta)$ to denote an optimal solution and the optimal value of $\mathcal{P}(\theta)$, respectively.

(1) For the case $\theta = 0$, compute an optimal solution $(x_1^*(0), x_2^*(0), x_3^*(0))$ and the optimal value $z^*(0)$.

(2) Compute the range of θ such that $(x_1^*(0), x_2^*(0), x_3^*(0))$ remains to be an optimal solution of $\mathcal{P}(\theta)$.

(3) In the range of θ obtained in (2), express $z^*(\theta)$ as a function of θ.

問 5

以下，P は確率，E は期待値を表すものとする．

(1) 非負整数値をとる確率変数 N に対して，$\mathsf{E}[N] = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(N > n)$ が成り立つことを示せ．

$X_1, X_2, \ldots$ を互いに独立に $[0,1]$ 上の一様分布にしたがう確率変数の列とする．

(2) a を実数として，$\mathsf{P}(X_1 + X_2 \leq a)$ を a を用いて表せ．

(3) $a \in [0,1]$ のとき，正整数 n に対して $\mathsf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq a) = \dfrac{a^n}{n!}$ が成り立つことを示せ．

(4) 確率変数 N を $N = \min\left\{ n \geq 1 \,\middle|\, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i > 1 \right\}$ により定める．$\mathsf{E}[N]$ を求めよ．

Problem 5

Let P and E denote a probability and the corresponding expectation, respectively.

(1) Let N denote a nonnegative integer-valued random variable. Show that the equality $\mathsf{E}[N] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(N > n)$ holds.

Let $X_1, X_2, \ldots$ denote a sequence of mutually independent and uniformly distributed random variables on $[0, 1]$.

(2) For a real number a, find an expression of $\mathsf{P}(X_1 + X_2 \leq a)$ in terms of a.

(3) When $a \in [0, 1]$, show that the equality $\mathsf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq a) = \dfrac{a^n}{n!}$ holds for each positive integer n.

(4) Define a random variable N by $N = \min\left\{ n \geq 1 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} X_i > 1 \right\}$. Derive $\mathsf{E}[N]$.

問 6

$a > 0$ を正の実数とする．開区間 $S = \{x \mid 0 < x < 1\}$ 上の確率密度関数で a により定まるものを

$$p(x|a) = \frac{x^{(1-a)/a}}{a}$$

と定義する．n を正の整数とし，S に値をとる確率変数 $X_1, X_2, ..., X_n$ が確率密度関数 $p(x|\sqrt{2})$ を持つ確率分布に独立に従うものとする．対数尤度関数 $L(a)$ を

$$L(a) = \sum_{i=1}^{n} \log p(X_i|a)$$

と定義する．ここで log は自然対数を表している．$L(a)$ を最大にする a を A_n と書く．次の問いに答えよ．

(1) A_n を $X_1, X_2, ..., X_n$ を用いて表せ．

(2) $b > 0$, $k = 1, 2$ に対して次の積分値

$$\int_0^1 (\log x)^k \, x^{b-1} \, \mathrm{d}x$$

を求めよ．ただし必要なら $\displaystyle\lim_{x \to +0} (\log x)^k x^b = 0$ を用いてもよい．

(3) A_n の期待値と分散を求めよ．

(4) $0 \leq c < 1/2$ とする．$n \to \infty$ のとき $n^c|A_n - \sqrt{2}|$ の期待値が 0 に収束することを示せ．

Problem 6

Let $a > 0$ be a real and positive number and $S = \{x \mid 0 < x < 1\}$ be an open interval. A probability density function on S with a is defined by

$$p(x|a) = \frac{x^{(1-a)/a}}{a}.$$

Let n be a positive integer and $X_1, X_2, ..., X_n$ be random variables which are independently distributed according to $p(x|\sqrt{2})$. The log likelihood function $L(a)$ is defined by

$$L(a) = \sum_{i=1}^{n} \log p(X_i|a),$$

where log means the natural logarithm. Let A_n denote the value of a that maximizes $L(a)$. Answer the following questions.

(1) Express A_n by using $X_1, X_2, ..., X_n$.

(2) For $b > 0$ and $k = 1, 2$, find the integral values

$$\int_0^1 (\log x)^k \, x^{b-1} \, \mathrm{d}x.$$

If necessary, $\lim_{x \to +0} (\log x)^k x^b = 0$ can be used.

(3) Find the expectation and the variance of A_n.

(4) Assume $0 \leq c < 1/2$. Show that the expectation of $n^c |A_n - \sqrt{2}|$ converges to zero as $n \to \infty$.

問 7

整数定数 1，二項演算 +，単項演算 − からなる算術式を後置記法で表現した文字列は，以下の文脈自由文法 G で定義することができる．

$$\begin{aligned}E &\to \mathtt{1}\\ E &\to EE+\\ E &\to E-\end{aligned}$$

たとえば，$\mathtt{111}{+}{+} \in L(G)$, $\mathtt{11}{+}{-} \in L(G)$ である．

(1) アルファベット $\{\mathtt{1}, +, -\}$ 上の文字列 w に対して，$\#_{\mathtt{1}}(w)$ を w に現れる 1 の個数，$\#_{+}(w)$ を w に現れる + の個数とし，$\#(w) = \#_{\mathtt{1}}(w) - \#_{+}(w)$ と定義する．たとえば，$\#_{\mathtt{1}}(\mathtt{111}{+}{+}) = 3$, $\#_{+}(\mathtt{111}{+}{+}) = 2$, $\#(\mathtt{111}{+}{+}) = 1$ である．

この時，$w \in L(G)$ ならば，$\#(w) = 1$ であることを示せ．

(2) ポンピング補題を用いて，$L(G)$ が正規言語でないことを示せ．

(3) 下の言語を生成する文脈自由文法 G' を示せ．

$$L(G') = \{w' \mid w' \neq \varepsilon \wedge \exists w(w'w \in L(G))\}$$

ここで，ε は空列 (文字を 1 つも含まない文字列) である．

(4) $w \in L(G)$ とする．$w' \neq \varepsilon$ ならば，$w'w \notin L(G)$ を示せ．

注: **ポンピング補題**　言語 L が正規言語であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

> s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割できる:
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
> 2. $|y| > 0$
> 3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 個連結したものを表わす．y^0 は空列となる．

Problem 7

The following context-free grammar G defines the set of strings representing arithmetic expressions composed of the integer constant $\mathtt{1}$, the binary operator $+$, and the unary operator $-$ in postfix notation.

$$E \to \mathtt{1}$$
$$E \to EE+$$
$$E \to E-$$

For example, $\mathtt{111}{+}{+} \in L(G)$ and $\mathtt{11}{+}{-} \in L(G)$.

(1) For a string w over the alphabet $\{\mathtt{1}, +, -\}$, $\#_{\mathtt{1}}(w)$ and $\#_{+}(w)$ denote the numbers of $\mathtt{1}$'s and $+$'s in w, respectively. Then, define $\#(w) = \#_{\mathtt{1}}(w) - \#_{+}(w)$. For example, $\#_{\mathtt{1}}(\mathtt{111}{+}{+}) = 3$, $\#_{+}(\mathtt{111}{+}{+}) = 2$, and $\#(\mathtt{111}{+}{+}) = 1$.

Show that if $w \in L(G)$, then $\#(w) = 1$.

(2) Show that the language $L(G)$ is not regular by using the pumping lemma.

(3) Give a context-free grammar G' that generates the following language:

$$L(G') = \{w' \mid w' \neq \varepsilon \wedge \exists w(w'w \in L(G))\}$$

where ε denotes the empty string (the string of length zero).

(4) Let $w \in L(G)$. Show that if $w' \neq \varepsilon$, then $w'w \notin L(G)$.

Note: **The pumping lemma** If L is a regular language, then there is a number p (the pumping length) such that

if s is any string in L such that $|s| \geq p$, then s can be divided into three pieces, $s = xyz$, satisfying the following conditions:

1. for each $i \geq 0$, $xy^iz \in L$,
2. $|y| > 0$, and
3. $|xy| \leq p$,

where $|s|$ represents the length of the string s, y^i means that i copies of y are concatenated together, and y^0 equals the empty string.

問 8

各ノードに正の整数値が割り当てられている重みつき二分木について以下の問に答えよ．二分木に関する情報はノードの ID を引数とする以下の関数で得るものとする．ただし ID は非負の整数である．以降では ID が i であるノードを「ノード i」，ノード i を根とする木を「木 i」と呼ぶ．

L(i)　ノード i の左の子ノードの ID(無い場合は -1) を返す
R(i)　ノード i の右の子ノードの ID(無い場合は -1) を返す
V(i)　ノード i に割り当てられた整数値を返す

(1) 木 i の重さを求めるアルゴリズム weight(i) を書け．ただし木の重さとは，その木に含まれる全てのノードに割り当てられた整数値の和だとする．アルゴリズムは疑似コードとして示せ．

(2) 木がつりあっている条件を次のように定義する: その木に含まれる全てのノード i について，木 L(i) の重さと木 R(i) の重さが等しいこと．(ただし左または右に子ノードが無い場合は，そこに重さ 0 の木があるものとして扱う．)

ノード数が 7 のつりあっている木のうち，高さが最大となるものを 1 つ図示せよ．各ノードに割り当てられる値は 1 以上の整数であることに注意せよ．

(3) 木 i がつりあっているかを判定するアルゴリズム balance(i) を以下に示す．木のノード数を n とするとき，このアルゴリズムの，V の呼出回数に基づく最悪計算量を求めよ．解答はオーダー (O) 記法を用いて示せ．

```
def balance(i)
  if i == -1 then
    return true
  else
    return ( balance(L(i)) && balance(R(i)) &&
             weight(L(i)) == weight(R(i)) )
  end
end
```

(4) アルゴリズム balance(i) の最悪計算量を改善する方法を述べよ．改善された計算量についても述べること．

Problem 8

Answer the following questions about binary trees, each of whose node is associated with a positive integer value. The following functions, which take a node ID as an argument, provide information of a binary tree. Every node ID is a non-negative integer. We hereafter refer to a node that has ID i as "node i", and a tree whose root node has ID i as "tree i".

`L(`i`)`	returns the ID of the left child of the node i (-1 when absent)
`R(`i`)`	returns the ID of the right child of the node i (-1 when absent)
`V(`i`)`	returns a value associated to the node i

(1) Write an algorithm `weight(`i`)` that computes the weight of tree i. The weight of a tree is the sum of the values associated to all the nodes in the tree. The algorithm should be written as pseudo-code.

(2) A tree is balanced when the following condition is satisfied: for each node i in the tree, tree `L(`i`)` and tree `R(`i`)` have equal weights. (When tree i has no left- or right-subtree, we consider that a zero weight tree is there.)

Illustrate one of the tallest trees that are balanced and have 7 nodes. Note that an assigned value of each node must be an integer at least 1.

(3) Below is an algorithm `balance(`i`)` that determines whether the tree i is balanced. Answer the worst-case complexity of the algorithm based on the number of calls to `V` in terms of the number n of nodes in the tree. Use big O notation to answer.

```
def balance(i)
  if i == -1 then
    return true
  else
    return ( balance(L(i)) && balance(R(i)) &&
             weight(L(i)) == weight(R(i)) )
  end
end
```

(4) Discuss how to improve the complexity of `balance(`i`)`. The discussion should mention the complexity of the improved algorithm.

問 9

(1) CPU の命令実行プロセスを概観すると，プログラムカウンタが参照する命令について，命令フェッチ，命令デコード，命令実行のステップを順に実行する．各ステップの役割についてそれぞれ 50 文字以内で説明せよ．

以下は，ある仮想的な CPU の実行を模倣するインタプリタの疑似コードの一部である．ただし，配列のインデックスは 0 から始まり，`unsigned int` は 32 ビット符号なし整数型とする．これを読み (2), (3), (4) に答えよ．

```
bool stop = false;
unsigned int reg = 0, program_counter = 0, stack_pointer = 0;
unsigned int stack[] = {0, 0, 0, 0, 0};
while (!stop) {
  unsigned int instruction = program[program_counter];
  program_counter = program_counter + 1;
  if (instruction == POP) {
    stack_pointer = stack_pointer - 1;
    reg = stack[stack_pointer];
  } else if (instruction == PUSH) {
    stack[stack_pointer] = reg;
    stack_pointer = stack_pointer + 1;
  } else if (instruction == IMM0) {
    reg = 0;
  } else if (instruction == IMM1) {
    reg = 1;
  } else if (instruction == ADD) {
    stack_pointer = stack_pointer - 1;
    reg = reg + stack[stack_pointer];
  } else if (instruction == STOP) {
    stop = true;
  }
}
```

(2) 上述のインタプリタに以下の内容の `program` を与えて実行したとしよう．`while` 文を抜けた時点での `reg`, `program_counter`, `stack_pointer`, `stack` の内容を答えよ．

`program = {IMM1, PUSH, PUSH, ADD, ADD, PUSH, ADD, STOP}`

(3) 上述のインタプリタに別の `program` を与えて実行した結果，`while` 文を抜けた時点で `reg` に 17 が保存されたとしよう．このような `program` のうち命令数が 13 以下のものをひとつ与えよ．

次のページに続く

(4) 上の仮想 CPU の命令はパラメタ（オペランド）をとらない．パラメタつきの命令を許せば IMM0 命令と IMM1 命令のように個別の定数ごとに命令を用意するかわりに,「reg に定数 I を読み込む」IMM[I] パラメタつき命令をひとつだけ用意できる．このようなパラメタつき命令を導入するにあたって命令フォーマットとインタプリタの実装をどのように変更すればよいか概略を示せ.

Problem 9

(1) A computer's CPU continuously processes the instruction referenced by the program counter with three stages, namely the Fetch stage, Decode stage, and Execute stage. Explain each of these stages within 30 words.

The following pseudo code is a part of an implementation of an interpreter that emulates execution of a virtual CPU. Here, array's index starts from 0 and `unsigned int` is the type of 32-bit unsigned integers. Read the code and answer the questions (2), (3), and (4).

```
bool stop = false;
unsigned int reg = 0, program_counter = 0, stack_pointer = 0;
unsigned int stack[] = {0, 0, 0, 0, 0};
while (!stop) {
  unsigned int instruction = program[program_counter];
  program_counter = program_counter + 1;
  if (instruction == POP) {
    stack_pointer = stack_pointer - 1;
    reg = stack[stack_pointer];
  } else if (instruction == PUSH) {
    stack[stack_pointer] = reg;
    stack_pointer = stack_pointer + 1;
  } else if (instruction == IMM0) {
    reg = 0;
  } else if (instruction == IMM1) {
    reg = 1;
  } else if (instruction == ADD) {
    stack_pointer = stack_pointer - 1;
    reg = reg + stack[stack_pointer];
  } else if (instruction == STOP) {
    stop = true;
  }
}
```

(2) Consider an execution of the interpreter by setting `program`, as follows. Answer the content of `reg`, `program_counter`, `stack_pointer`, and `stack`, when the interpreter leaves the `while` loop.

`program = {IMM1, PUSH, PUSH, ADD, ADD, PUSH, ADD, STOP}`

(3) Consider another `program` that makes the value of `reg` 17 when the interpreter leaves the `while` loop. Give the content of such a `program` that has at most 13 instructions.

Continued on the next page

(4) None of the above mentioned virtual CPU instructions takes a parameter (or, an operand). If the virtual CPU supported instructions that take parameters, we could replace non-parametric instructions such as `IMM0` and `IMM1` with a parametric `IMM[`I`]` instruction that takes an immediate integer value I as its parameter. Briefly describe a modification required to support such parametric instructions with respect to the design of instruction format as well as the implementation of the interpreter.